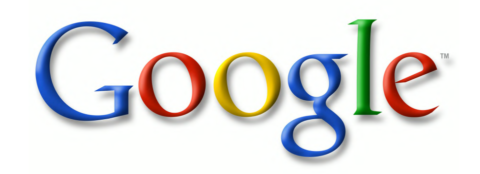
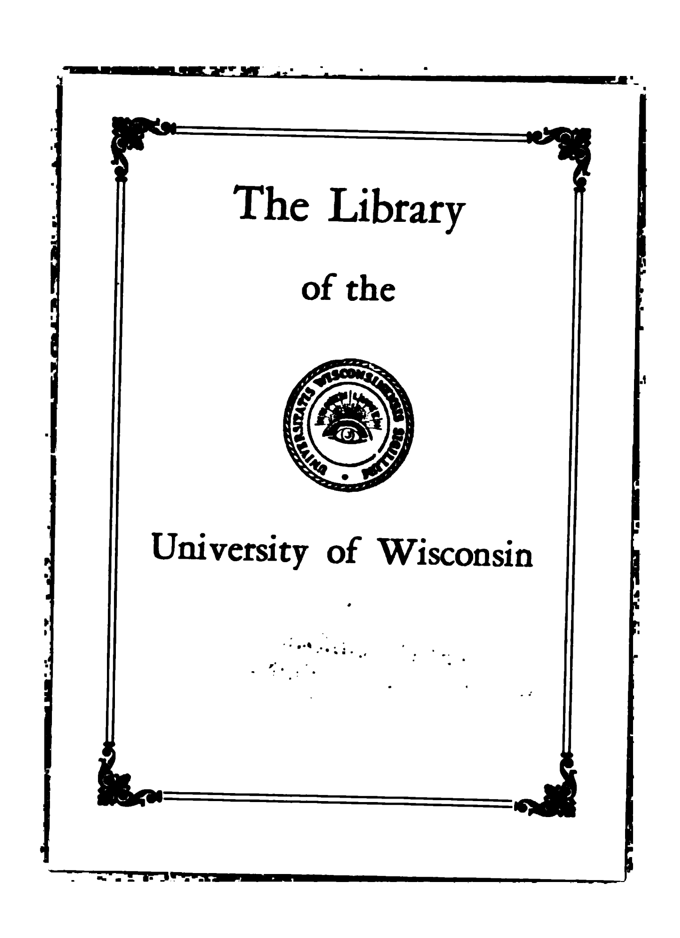






NOVA ACTA
der Ksl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher
Bd. LXVII. Nr. 2.

Versuch

einer

theoretischen Darstellung des täglichen Ganges der Lufttemperatur.

Von

Dr. J. Halm
in Strassburg.

Eingegangen bei der Akademie am 22. Juni 1895.

HALLE.
1895.
Buchdruckerei der Dr. Güntz'schen Stiftung vormals E. Blochmann & Sohn in Dresden.
In Commission bei Wilh. Engelmann in Leipzig.



Der Versuch, den Vorgang der täglichen Wärmeänderung der Atmosphäre an der Hand der zu Grunde liegenden physikalischen Gesetze in analytische Formen zu kleiden, ist seit Lambert, welcher sich mit diesem Gegenstande zuerst in ausgedehnter Weise beschäftigt hat, von mehreren Mathematikern unternommen worden. Für den nächtlichen Erkaltungsprocess bietet die bekannte Arbeit des Herrn Weilenmann[1]) sehr einfache und wahrscheinliche theoretische Grundlagen; die Ausdehnung, welche der Verfasser seinen Formeln zur Erklärung des Erwärmungsvorganges der unteren Atmosphäre bei Tage gegeben hat, musste ihn indessen zu so vielen Beschränkungen und unwahrscheinlichen Hypothesen veranlassen, dass sein Resultat nach dieser Richtung hin keineswegs den Anforderungen genügt, welche man an eine theoretische Darstellung stellen muss und selbst als Näherungsformel wegen der vielen darin auftretenden willkürlichen Constanten keine praktische Bedeutung beanspruchen kann. Der Grund dieses Misserfolges ist nun aber nicht in der Unzulänglichkeit der Weilenmann'schen Hypothesen, sondern lediglich in seiner Annahme über die von der Erdoberfläche und Atmosphäre aufgenommene Sonnenwärme zu suchen. Der mathematische Ausdruck für die durch die Sonnenstrahlung bewirkte Temperaturänderung sowohl der äussersten Bodenschicht als auch der Atmosphäre ist in der That ein ganz anderer, als er von Herrn Weilenmann seinen Gleichungen supponirt wurde. Es wird der Hauptzweck der folgenden Untersuchungen sein zu zeigen, dass auch während des Tages, unter Berücksichtigung eines präcisen, aus sorgfältigen Beobachtungen hergeleiteten Gesetzes über die gesammte, den Erdboden erreichende Wärmestrahlung, die

[1]) Weilenmann: Ueber den täglichen Gang der Temperatur zu Bern.

Weilenmann'schen Hypothesen über die Wärmebewegung der untersten Luftschichten auf eine analytische Darstellung der Temperaturcurve führen, welche an Einfachheit und praktischer Brauchbarkeit wohl nichts zu wünschen übrig lässt.

Zur Prüfung der Resultate stand mir eine grosse Reihe stündlicher Beobachtungen zur Verfügung, unter denen ganz besonders die von Herrn Wild[1]) edirten Beobachtungen von Stationen des russischen Reiches durch ihre Anzahl und Zuverlässigkeit hervorragen. Es ist eine gewiss berechtigte Forderung, dass das Prüfungsmaterial möglichst wenig durch zufällige, d. h. nicht gesetzmässige Störungen entstellt sei. Bei einem Klima, das zu häufigem Wechsel der meteorologischen Factoren neigt, wird naturgemäss eine längere Beobachtungsreihe zur Erkenntniss der gesetzmässigen Grundlagen nöthig sein, als bei einem anderen von gleichartigem Charakter. Nun wird man erwarten dürfen, dass die Temperaturcurven der centralrussischen Stationen wegen ihres ganz ausserordentlich beständigen Klimas ein guter Prüfstein für eine Theorie sein werden, und aus diesem Grunde habe ich mich vornehmlich der erwähnten Wild'schen Abhandlung bedient, indem ich bemüht war, die auf pag. 90 ff. aus dem gesammten Beobachtungsmaterial gefolgerten Erfahrungssätze durch die Theorie zu begründen.

Der Gang dieser Untersuchung ist folgender: Zunächst ist festzustellen, nach welchem Gesetze die horizontal vorausgesetzte Erdoberfläche durch die gesammte (directe und zerstreute) Sonnenstrahlung erwärmt wird. Die Verbindung dieses Gesetzes mit der Weilenmann'schen Hypothese der Wärmestrahlung der Erdoberfläche gegen die Atmosphäre wird zu einer Differentialgleichung für die Temperatur der untersten Luftschicht führen und die letztere selbst sich als ein particuläres Integral dieser Gleichung ergeben, welches lediglich abhängt von Functionen des Stundenwinkels der Sonne und dessen Constante bestimmt sind durch die Intensität der Sonnenstrahlung und den bekannten Weilenmann'schen Factor h. Anschliessend müssen dann eine Reihe von gesetzmässigen Störungen behandelt werden, welche bestimmte Modificationen des Integrals veranlassen, unter denen Bewölkung, Luftfeuchtigkeit und vor-

[1]) Wild: Die Temperaturverhältnisse des russischen Reiches. Suppl. Bd. zum Rep. d. Meteorol.

herrschende Luftströmungen besondere Beachtung beanspruchen. Den Schluss bildet die Anwendung der theoretischen Formeln auf das Gebiet der meteorologischen Praxis.

§ 1.

Wäre die Atmosphäre ein vollständig diathermaner Körper, so würde das Gesetz, nach welchem die Erwärmung einer horizontalen Oberfläche am Grunde des Luftmeeres durch die Strahlung der Sonne erfolgte, durch die einfache Relation:

$$I = A \cos Z \tag{1}$$

darstellbar sein, wo Z die Zenithdistanz der Sonne und A, in irgend welchem calorimetrischen Maasse, die Wärmeenergie der senkrecht einfallenden Strahlen vorstellten. Allein die Fähigkeit der Atmosphäre, Wärmestrahlen zu absorbiren und zu zerstreuen, verursacht eine beträchtliche Verminderung der directen Sonnenstrahlung, welche um so erheblicher ist, je grösser der Weg, den die Strahlen in der Luft zurücklegen müssen. Die thatsächlich an der Erdoberfläche ankommende Energie der senkrecht auffallenden directen Sonnenstrahlen wird durch die bekannte Bouguer'sche Formel:

$$A_z = A p^{\sec Z} \tag{2}$$

dargestellt, worin p den Transmissionscoëfficienten der Atmosphäre bedeutet. Die Grösse A_z kann durch actinometrische oder bolometrische Messungen bestimmt werden. Aus der Combination zweier Beobachtungen bei verschiedener Sonnenhöhe sind dann die Unbekannten A, d. h. die Sonnenenergie ausserhalb der Atmosphäre, und p zu bestimmen, vorausgesetzt, dass die letztere Grösse während der ganzen Beobachtungszeit als constant angenommen werden darf. Die Beobachtungen lehren aber, dass diese Annahme keineswegs zu gestatten ist, dass vielmehr der Transmissionscoëfficient p mit der Länge des Strahlenweges wächst. Für diese merkwürdige Erscheinung sind verschiedene Hypothesen aufgestellt worden. Radau[1]) nimmt an, dass die Sonnenstrahlen in zwei Gruppen (leuchtende und dunkle Wärme) mit verschiedenen Transmissionscoëfficienten (1 und $^2/_3$) zerfallen, während Langley[2]) behauptet, dass das die Oberflächeneinheit treffende Strahlenbündel eine ununterbrochene Reihe von Transmissionscoëfficienten von 0 bis 1 enthalte.

---

[1]) Actinométrie, pag. 25.

[2]) Research on Solar Heat.

Beide Hypothesen erklären das Wachsen von p mit dem Luftwege[1]); allein beide trifft der Vorwurf, dass sie nicht durch Thatsachen erwiesen werden können. Eine entschieden einfachere Erklärung scheint aus den Crova'schen Intensitätsmessungen hervorzugehen und ist von diesem selbst an mehreren Stellen betont worden; jedoch soll erst an späterem Orte darauf eingegangen werden.

Zunächst interessirt uns hier das aus einwurfsfreien Beobachtungen direct gefundene numerische Verhältniss der Sonnenenergie nach Abschwächung durch die Atmosphäre zur ursprünglichen Intensität. Solche Quotienten hat Herr Zenker auf S. 41 und 42 seiner Abhandlung aus den vorzüglichen Langley'schen Messungen abgeleitet, und wir dürfen diese Werthe nach seiner Meinung als den „natürlichsten Ausdruck des Gesetzes der Sonnenintensitäten" betrachten.

Allein, wie schon angedeutet wurde, hängt die Erwärmung der Erdoberfläche nicht nur von dieser directen Strahlung der Sonne, sondern auch von denjenigen Wärmemengen ab, welche die gesammte Atmosphäre vermöge ihrer strahlenzerstreuenden Kraft von den der directen Energie entzogenen Wärmestrahlen der Erdoberfläche wieder zuführt. Herr Zenker hat in der erwähnten Abhandlung die mühevolle Aufgabe unternommen, diese Wärmemengen aus den Verlusten der directen Strahlung zu berechnen. Die wesentliche Grundlage dieser Rechnungen bildet die Theorie, welche Clausius über die Zerstreuung des Sonnenlichtes in der Atmosphäre aufgestellt hatte. Zugleich aber widmet Herr Zenker ein besonderes Augenmerk mehreren bemerkenswerthen Punkten, wo die Clausius'schen Rechnungen in Bezug auf das Problem der Wärmestrahlung modificirt werden mussten. Leider darf es nicht meine Aufgabe sein, dem interessanten Ideengange der Zenker'schen Abhandlung zu folgen, und muss zur theoretischen Prüfung der hier benutzten Resultate auf das Studium derjenigen Kapitel verwiesen werden, welche von der zerstreuten Strahlung handeln. Hier nur das wichtigste Resultat der Zenker'schen Untersuchung:

Setzen wir die Sonnenintensität bei senkrecht einfallenden Strahlen ausserhalb der Atmosphäre gleich 1, so giebt die folgende Tabelle für ver-

---

[1]) Cf. Zenker: Vertheilung der Wärme auf der Erdoberfläche.

schiedene Zenithdistanzen der Sonne die gesammte, in der Zeiteinheit von der (horizontalen) Erdoberfläche aufgenommene Wärme:

Zenith-distanz	Wärme-menge	nach Formel (3)	Differenz	Zenith-distanz	Wärme-menge	nach Formel (3)	Differenz
0°	0.8970	0.8960	+ 10	50°	0.5491	0.5495	— 4
10	0.8809	0.8813	— 4	60	0.4094	0.4110	— 16
20	0.8372	0.8375	— 3	70	0.2592	0.2567	+ 25
30	0.7650	0.7660	— 10	80	0.1066	0.0944	+ 122
40	0.6677	0.6690	— 13				

Die dritte Columne ist nach der Formel:

$$\frac{I}{A} = 0.97 \cos Z - 0.0740 \tag{3}$$

berechnet, die, wie man aus den Differenzen in der vierten Columne ersieht, eine für praktische Zwecke hinreichende Näherungsformel vorstellt. Die Formel (3) wird in ihrer allgemeinen Form

$$\frac{I}{A} = a \cos Z - b \tag{4}$$

die Grundlage für die weiteren Rechnungen bilden. Da alle diejenigen Strahlen, welche nicht zur Erdoberfläche gelangen, nach der entgegengesetzten Seite, d. h. nach der oberen Grenze der Atmosphäre zerstreut werden und daher sich nicht an dem Erwärmungsprocess betheiligen, so stellt die Gleichung (4) die Gesammtheit derjenigen Wärmestrahlung vor, welche die Ursache der Temperaturänderung von Erdboden und Atmosphäre bildet.

Die Langley'schen Beobachtungen, welche dem vorstehenden Resultat zu Grunde liegen, gehören sicherlich zu dem Besten, was wir über diesen Gegenstand besitzen. Aber der Zweck, den Langley bei seinen Messungen verfolgte, war lediglich auf eine möglichst einwurfsfreie Ermittelung des wahren Betrages der directen Strahlung gerichtet. Demgemäss wählte er einen hochgelegenen Beobachtungsort, dessen Atmosphäre möglichst durchlassfähig für die Wärmestrahlen schien. Für die folgenden Untersuchungen ist es jedoch von besonderer Bedeutung, gerade die Störungen zu untersuchen, welche vornehmlich der in den unteren Schichten suspendirte Wasserdampf vermöge seiner enormen Absorptionsfähigkeit verursacht. Von allen Beobachtern wird bestätigt, dass selbst an den heitersten Tagen, wo das Auge nicht die leiseste Trübung zu erkennen vermag, die thermische Wirkung der Sonnenstrahlung ganz beträchtlichen Schwankungen unterworfen ist. Auf die Gesetzmässigkeit

dieser letzteren und ihren Zusammenhang mit den Veränderungen der Feuchtigkeit der Atmosphäre ist besonders von Herrn Crova hingewiesen worden, der im Stande war, durch ein selbstregistrirendes Aktinometer die tägliche Curve der eingestrahlten Sonnenwärme festzustellen. Seine Resultate sind für die folgenden Betrachtungen von solcher Wichtigkeit, dass ein kurzer Ueberblick geboten erscheint.

Nehmen wir an, die Energie der Sonnenwärme werde für einen bestimmten normalen Zustand der Atmosphäre durch die Gleichung (2) dargestellt, so wird, nachdem die Luft mit zunehmender Erwärmung oder aus anderen Ursachen ihren Wasserdampfgehalt vergrössert hat, diese Gleichung offenbar die Form annehmen:

$$A_z = A p^{\sec Z} . e^{-\alpha},$$

wo α von dem Feuchtigkeitszuwachs abhängt. Da α gewöhnlich eine kleine Zahl ist, so wird die Näherungsformel:

$$A_z = A p^{\sec Z} (1 - \alpha) \qquad (5)$$

in den meisten Fällen zur Darstellung genügen.

Die folgende Tabelle[1]), welche in der zweiten Columne die um Mittag beobachteten Intensitäten[2]) enthält, giebt ein deutliches Bild von den beträchtlichen Schwankungen der Sonnenintensität in den verschiedenen Monaten:

	A_z beob.	$\sec Z$	$p^{\sec Z}$	beob. $rA = \frac{A_z}{p^{\sec Z}}$	ber. nach (6)	$B-R$	p'	
Dec. Jan. .	0.94	2.46	0.493	1.91	1.87	+ 0.04	0.70	
Febr. März .	1.04	1.61	0.630	1.65	1.70	— 0.05	0.58	(5a)
April Mai .	1.13	1.15	0.718	1.57	1.48	+ 0.09	0.52	
Juni Juli .	1.10	1.07	0.735	1.50	1.45	+ 0.05	0.48	
Aug. Sept. .	1.02	1.25	0.698	1.46	1.56	— 0.10	0.50	
Oct. Nov. .	1.01	1.87	0.584	1.73	1.77	— 0.04	0.63	

Nehmen wir als mittleren Transmissionscoëfficienten $p = 0.75$ an und berechnen aus den beobachteten Werthen von A_z (zweite Columne) die Grössen A und α, letzteres als Function der Zenithdistanz, so ermitteln wir:

$$A(1-\alpha) = rA = 2.20 - 0.80 \cos Z \qquad (6)$$

[1]) Vergl. das Referat von Hann, Meteorol. Zeitschr. 1888, p. 199.

[2]) Einheit die kleine Calorie.

Aus dieser Gleichung geht zunächst hervor, dass die Absorption der Wärmestrahlen mit zunehmender Sonnenhöhe sehr beträchtlich wächst. Je steiler aber die Sonnenstrahlen auf die Erdoberfläche auffallen, um so mehr erwärmt sich diese und die aufliegende Atmosphäre, um so lebhafter geht die Entwickelung und Aufnahme von Wasserdampf in der letzteren vor sich. Mit anderen Worten: Die Schwankungen der Luftfeuchtigkeit folgen demselben Gesetze wie die der Sonnenintensitäten. Für unseren Fall ist nun aber von besonderem Interesse, dass im Sommer (leider waren mir nur für diese Jahreszeit Crova'sche Messungen zugänglich) auch die täglichen Schwankungen durch die Gleichung (6) dargestellt werden. Zum Beweise mögen die folgenden Daten über den täglichen Gang der Sonnenstrahlung an einem Julitage dienen:

	7^h am.	10	11	Mittag	1 pm.	2	5
A_z beob. .	0.98	1.19	1.20	1.16	1.16	1.18	0.93
sec Z . . .	2.35	1.20	1.11	1.08	1.11	1.20	2.35

Diese Werthe können durch eine Gleichung:

$$rA = 2.3 - 0.8 \cos Z$$

befriedigend dargestellt werden, die sich mit (6) in bester Uebereinstimmung befindet.

Es bleibt einem späteren Paragraphen vorbehalten, die Beziehungen zwischen Feuchtigkeit und Einstrahlung noch auf anderem Wege nachzuweisen und besonders das sehr verschiedene Verhalten des täglichen Ganges der ersteren in den extremen Jahreszeiten zu constatiren. Die Crova'schen Untersuchungen sollen hier in der Hauptsache nur zeigen, dass die Gleichung (4) im Allgemeinen nicht den thatsächlichen Ausdruck für das Gesetz der Einstrahlung darstellt, dass vielmehr in diesem letzteren noch ein Glied, welches mit dem Quadrat von cos Z multiplicirt ist, eine bedeutende Rolle spielen kann.

Die letzte Columne der Tabelle (5^a) enthält diejenigen Werthe des Transmissionscoëfficienten, welche unter der Annahme einer Solarconstanten = 2.4 cal. aus der Bouguer'schen Gleichung berechnet worden sind. Sie bestätigen die bisherige Annahme, dass die Coëfficienten mit abnehmender Zenithdistanz sich verkleinern. Vergleicht man diese Werthe mit den folgenden Langley'schen Beobachtungen

sec Z .	5.0	4.0	3.0	2.0	1.0
p' . .	0.834	0.825	0.810	0.797	0.778,

so wird man finden, dass erstlich die im Meeresniveau erhaltenen Messungen Crova's in allen Zenithdistanzen kleiner sind, als die auf freier Bergeshöhe bei möglichst geringer Feuchtigkeit beobachteten Werthe Langley's. Zum Zweiten aber erkennt man, dass in demselben Intervall (sec $Z = 2.46$ bis 1.07), wo die ersteren von 0.70 bis 0.48 schwanken, die Veränderung der letzteren nur $0\overset{\circ}{.}2$ beträgt. Beide Sätze im Zusammenhalte bilden, nach unserer Meinung, eine hinreichende Bestätigung für die Annahme, dass die Veränderlichkeit des Transmissionscoëfficienten durch Schwankungen des Feuchtigkeitszustandes der Atmosphäre verursacht wird.

Im folgenden Paragraphen sollen die hier in gedrängter Form recapitulirten Resultate der Aktinometrie zur eigentlichen Aufgabe dieser Arbeit, der theoretischen Darstellung des täglichen Ganges der Lufttemperatur, verwendet werden. Zunächst wird ein kurzer Ueberblick über die Weilenmann'schen Hypothesen und Resultate nöthig sein, welchem sich unmittelbar die Herleitung und Integration derjenigen Differentialgleichung anschliessen kann, welche den analytischen Ausdruck für das Temperaturproblem während der ganzen Zeit vorstellt, wo sich die Sonne über dem Horizonte befindet.

§ 2.

In der erwähnten Abhandlung geht Herr Weilenmann zunächst von der Voraussetzung aus, dass die Ausstrahlung der Erdoberfläche während der Nacht nicht direct gegen den Weltraum, sondern gegen eine hochgelegene Luftschicht von constanter Temperatur erfolge, und dass der Boden das Bestreben habe, diese verlorene Wärme durch Absorption aus der ihm benachbarten Luftschicht, deren Temperaturverlauf untersucht werden soll, wieder zu ersetzen.

Bezeichnet t' die Temperatur der Erdoberfläche, t diejenige der angrenzenden und u die constante Temperatur einer höher gelegenen Luftschicht, so führt die Anwendung des Newton'schen Gesetzes, wonach die Geschwindigkeit der Wärmeabgabe eines Körpers an einen anderen der Differenz ihrer Temperaturen proportional ist, zu den beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dt'}{dz} &= -h\,(t'-u) + h\,(t-t') \\ \frac{dt}{dz} &= -h\,(t-t') \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

worin h eine Constante bedeutet, welche Herr Weilenmann als das „Emissionsvermögen der Erdoberfläche gegen die Atmosphäre“ definirt hat.

Durch Differentiirung der zweiten Gleichung und Elimination von t' gelangt man zur Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{d^2\,(t-u)}{dz^2} + 3h\,\frac{d\,(t-u)}{dz} + h^2\,(t-u) = 0 \tag{8}$$

Bekanntlich wird dieser Gleichung durch das allgemeine Integral

$$t = u + c_1\,.\,e^{\lambda_1 z} + c_2\,.\,e^{\lambda_2 z}$$

genügt, wenn λ_1 und λ_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$\lambda^2 + 3h\lambda + h^2 = 0$$

vorstellen. Demnach wird man, da hieraus $\lambda_1 = -0.382h$, $\lambda_2 = -2.618h$ folgt, das Integral von (8) auch schreiben dürfen:

$$t = u + c_1\,.\,e^{-0.382\,h\,z} + c_2\,.\,e^{-2.618\,h\,z}. \tag{9}$$

Herr Weilenmann weist nach, dass sich aus sämmtlichen, auf diese Formel geprüften Beobachtungen die willkürliche Constante c_2 als verschwindend klein ergiebt, dass also die nächtliche Temperaturcurve durch das particuläre Integral:

$$t = u + c_1\,.\,e^{-0.382\,h\,z}, \tag{10}$$

und zwar in durchaus befriedigender Weise dargestellt wird.

Die Gleichung (10) erhält besonders deshalb ein theoretisches Interesse, weil sie dazu dienen kann, den Coëfficienten h zu bestimmen. Herr Weilenmann hat für mehrere Stationen sehr verschiedener Klimate die Werthe dieser Grösse berechnet und dieselbe für alle Orte constant gefunden. Eine sehr ausführliche Discussion der Berner Beobachtungen zeigte ferner ihre völlige Unabhängigkeit von der Bewölkung. Eine kleine jährliche Periode in den Weilenmann'schen Zahlen wurde von Herrn Hellmann[1]) nachgewiesen, welche darauf hinzudeuten scheint, dass die Beschaffenheit der Erdoberfläche, welche durch die verschiedenen Phasen der Vegetation und die klimatischen Unterschiede der Jahreszeiten gewiss nicht unerheblich verändert wird, auf ihr Vermögen, Wärme auszustrahlen, vielleicht von Einfluss ist. Der mittlere

[1]) Die täglichen Veränderungen der Temperatur der Atmosphäre in Norddeutschland. Diss. p. 4.

Weilenmann'sche Werth $h = 0.375$ wurde durch spätere Untersuchungen anderer Meteorologen[1]) bestätigt.

Gewiss lässt sich gegen die Weilenmann'schen Deductionen der Vorwurf erheben, dass seine Annahmen über die Art, wie die Erdoberfläche ihre Wärme an die Atmosphäre etc. abgiebt, auf keinerlei tiefergehende analytische Betrachtungen gegründet sind. Herr Maurer in Zürich hat in mehreren Arbeiten über denselben Gegenstand, auf diesen Mangel sich stützend, die physikalische Zulässigkeit der Weilenmann'schen Hypothesen bestritten und an ihre Stelle andere hypothetische Grundlagen gesetzt, die zwar auf dasselbe Resultat, dagegen auf eine ganz andere physikalische Definition des „Strahlungsvermögens der Atmosphäre" hinführen. Herr Maurer definirt dieses letztere, analog dem thermischen Leitungsvermögen, als diejenige „Wärmemenge, welche eine atmosphärische Schichte von einer Dicke gleich der Einheit (per Flächeneinheit) in der Zeiteinheit vorwiegend unter dem Einflusse der durch Strahlung erkaltenden äussersten Erdoberflächenschichte (relativ) gegen letztere während der Nacht abgiebt" (Meteorol. Z. 1887, p. 190). Von der Betrachtung derjenigen Wärmemengen ausgehend, welche irgend eine Volumeinheit Atmosphäre auf dem Wege der Leitung und Strahlung empfängt, gelangt er zu einer partiellen Differentialgleichung (Meteorol. Z. 1886, p. 212), deren allgemeines Integral die zeitliche Wärmebewegung in dem Volumelement darstellt. Besondere Betrachtungen führen ihn ferner zu der Annahme, dass die Wirkung der Wärmeleitung gegenüber derjenigen der Strahlung vernachlässigt werden kann, und das Integral, welches die zeitliche Aenderung der Temperatur des Volumelementes während der Nacht ausdrückt, die einfache Form annimmt:

$$t = \alpha + \beta . e^{-\frac{\sigma}{\varrho . c} z}.$$

Hierin bedeutet σ das soeben definirte Strahlungsvermögen, ϱ die Dichte und c die specifische Wärme der Luft. Den mittleren, aus 5 Stationen abgeleiteten Werth von σ hat Herr Maurer zu

$$0.418 \times 10^{-4} \text{ Calorieen } \left(\frac{\text{Centimeter}}{\text{Stunde}}\right)$$

berechnet.

---

[1]) Vergl. eine Abhandlung des Herrn Angot in den Annales du bureau central météorologique de France Année 1888.

Da σ und c nach der Definition des Herrn Maurer Constante sind, so muss offenbar, wenn der zeitliche Temperaturverlauf in einem Volumelement dem thatsächlich in der Atmosphäre beobachteten entsprechen soll, der Ausdruck

$$b = e^{-\frac{\sigma}{\varrho \cdot c}}$$

mit der Dichte der Atmosphäre abnehmen. Vergleicht man indessen die von Herrn Weilenmann mitgetheilten Werthe von $\log b$ für Bern, Toronto, St. Petersburg[1]) einerseits, dem Grossen St. Bernhard andererseits:

	Bern	Toronto	Petersburg	St. Bernhard
Winter . . .	9.932	9.962	9.953	9.935
Frühling . .	942	951	959	944
Sommer . .	943	921	911	954
Herbst . . .	924	927	928	910
Mittel . . .	9.935	9.940	9.938	9.936

so ergiebt sich erstens, dass im Jahresmittel die Grösse b für alle Stationen dieselbe ist, und dass zweitens die Schwankungen dieser Grösse in den einzelnen Jahreszeiten für den St. Bernhard nicht erheblicher sind, als für die anderen Stationen. Hieraus würde aber folgen, dass nicht σ, sondern $\frac{\sigma}{\varrho}$ eine Constante bedeute.

Stehen nun einerseits die angeführten Beobachtungen im Widerspruche mit den Resultaten des Herrn Maurer, so sind auch andererseits seine Voraussetzungen weder einfacher, noch wahrscheinlicher als die Weilenmann'schen. Das relative Strahlungsvermögen eines Körpers, d. h. diejenige Wärmemenge, welche derselbe in der Zeiteinheit an einen anderen durch Strahlung abgiebt, resp. von ihm empfängt, hängt von der physikalischen Beschaffenheit sowohl des wärmespendenden, als auch des empfangenden Theiles ab. Daher dürfte die Voraussetzung, dass man sich „den Einfluss der Strahlung der Atmosphäre und des Weltraumes, wie denjenigen von Seiten der Erdoberfläche her auf die untersten Luftschichten (d. h. auf das zu betrachtende Volumelement) durch den strahlenden Einfluss einer einzigen Hülle von (vorläufig) constanter Temperatur ersetzt" denken könne, wohl kaum zu einer theoretischen Grundlage geeignet sein.

---

[1]) Diese Stationen hat Herr Maurer ebenfalls zur Berechnung seiner Constanten σ benützt.

Wenn man das Problem streng analytisch behandeln wollte, so müsste man sicherlich, wie es von Herrn Maurer versucht worden ist, auf die Vorgänge in einem Luftelement zurückgreifen, aber nicht in einem Volumen-, sondern Massenelement. Wir wissen über die Dimensionen der Luftschicht, deren Temperatur wir messen, gar nichts Bestimmtes. Aber wir dürfen sicherlich annehmen, dass die Summe von Luftmolekülen, welche bei dem Erwärmungsprocesse an einer im Meeresniveau gelegenen Station betheiligt ist, sich weder vergrössern, noch verkleinern würde, falls wir in der Lage wären, die Erdoberfläche in eine beliebig grössere Höhe zu versetzen. Mit anderen Worten: irgend eine Wärmequelle, die im Stande ist, eine bestimmte Anzahl von Molekülen der untersten Luftschicht beispielsweise um 1° C. zu erhöhen, wird, in eine höher gelegene Luftschicht versetzt, dieselbe Wirkung auf dieselbe Molekülanzahl erstrecken. Hieraus geht aber hervor, dass die Luftschicht, deren Temperatur z. B. in Bern beobachtet wird, eine geringere Höhe hat, als diejenige auf dem St. Bernhard. Die analytische Betrachtung des Wärmevorganges in einem Volumenelement ist daher schon aus dem Grunde nicht zulässig, weil die Temperaturen, welche das Thermometer in den verschiedenen Schichten der Atmosphäre anzeigt, sich nicht auf eine constante Volumeneinheit beziehen können.

Viel natürlicher und ohne die erwähnten Widersprüche stellt die Weilenmann'sche Hypothese das Problem dar. Hier sind es zwei Körper, die sich in wechselseitigem Wärmeaustausch befinden: der Erdboden und die auf ihm ruhende Atmosphäre. Die Temperaturvertheilung in letzterer wird einerseits durch die Ausstrahlung in den Weltraum, andererseits durch die Zustrahlung von Seiten der Erdoberfläche und die eigene Wärmeleitung bedingt. Welches nun auch das Gesetz der Wärmebewegung in jedem einzelnen Luftmolekül sei, so wird sich in jedem Augenblicke eine Temperatur derart angeben lassen, dass eine Luftmasse, deren sämmtliche Moleküle diese Temperatur haben, dieselbe Wärmewirkung, wie die ganze, an dem Wärmeprocesse betheiligte Atmosphäre besitzt. Denken wir uns nämlich die letztere in dünne parallele Schichten zerlegt, über deren resp. Höhen vorläufig keine Voraussetzungen nöthig sind, und bezeichnen wir mit u die Temperatur einer dieser Schichten in einem bestimmten Zeitmoment. Es wird nun immer möglich sein, die Schicht u so zu wählen, dass jeder unter u gelegenen Schicht eine zweite

über u befindliche von bestimmter Höhe entsprechen wird, deren Wärmewirkung im gleichen, aber entgegengesetzten Betrage von derjenigen der Schicht u abweicht. Somit können wir, unter der weiteren Voraussetzung, dass die ganze von der Erdoberfläche ausgestrahlte Wärme in der Atmosphäre absorbirt wird, d. h. keine directe Strahlung gegen den Weltraum stattfindet, unsere Betrachtungen über die von der Erdoberfläche ausgestrahlte Wärme dahin vereinfachen, dass wir die Atmosphäre durch eine Luftmasse von der Temperatur u ersetzen. Ueber die Höhe der Luftschicht u über der Erdoberfläche ist uns natürlich nichts bekannt. Unter der Annahme, dass sich diese Schicht jenseits der Grenze befinde, wo der Einfluss der täglichen Erwärmung anfängt unmerklich zu werden, darf u als constant vorausgesetzt werden. Ob diese Annahme zutrifft, wird aus der Uebereinstimmung der Beobachtungen mit den im nächsten Paragraphen folgenden analytischen Entwickelungen zu schliessen sein.

Aus der Wärmetheorie ist bekannt[1]), dass die Wärmemenge, welche ein Körper, dessen Grenzflächen mit einer Atmosphäre von der Temperatur u in Berührung stehen, in einem Zeitdifferential an letztere abgiebt, durch einen Ausdruck

$$dt' = -h\ (t' - u)\ dz \tag{11}$$

dargestellt werden kann, wo t' die Temperatur des Körpers an seiner Begrenzung bedeutet und h für alle Temperaturzustände, soweit sie für unser Problem in Frage kommen, eine Constante ist. Diese Grösse h, welche Fourier als das äussere Leitungsvermögen des betreffenden Körpers definirt, ist für verschiedene Substanzen sehr verschieden und hängt sowohl von der Natur des Körpers, als auch von den Dimensionen seiner Begrenzung ab.

Auf den vorliegenden Fall angewendet, würde somit die zeitliche Wärmebewegung in der Erdoberfläche, insofern sie durch den Wärmeverlust gegen die Atmosphäre verursacht ist, durch die Gleichung (11) darstellbar sein, wenn u den vorher besprochenen Bedingungen genügt. Indessen darf hier ein höchst wichtiger Umstand nicht übersehen werden. Die Abgabe von Wärme seitens der Erdoberfläche hat naturgemäss eine Abkühlung derselben zur Folge. Nehmen wir an, dass ihre Temperatur (wie es während der Nacht

[1]) Cf. J. Fourier, Théorie de la Chaleur.

der Fall ist) unter diejenige der untersten angrenzenden Luft herabsinke, so wird sie natürlich das Bestreben haben, der letzteren ihren Wärmeüberschuss zu entziehen. Ebenso wird im umgekehrten Falle, wo trotz der Wärmeausstrahlung die Temperatur des Bodens noch über derjenigen der benachbarten Luftmoleküle liegt, eine weitere Wärmeabgabe an letztere erfolgen. Da aber offenbar die Wärmemenge, welche auf diesem Wege in einem unendlich kleinen Zeitintervall von der Erdoberfläche empfangen, resp. abgegeben wird, durch den Ausdruck

$$-h\,(t'-t)\,dz$$

vorgestellt wird, so haben wir der rechten Seite der Gleichung (11) dieses Glied noch beizufügen.

Ich glaube, dass die Differentialgleichungen, welche Herr Weilenmann seinen Rechnungen zu Grunde gelegt hat, auf diesem Wege in hinreichender Weise begründet werden können, und die folgenden Betrachtungen werden zu zeigen vermögen, dass diese sehr einfachen und natürlichen Grundlagen den täglichen Gang der Lufttemperatur mit der grössten Schärfe darzustellen im Stande sind.

§ 3.

Setzen wir einen Körper von beliebiger Temperatur dem strahlenden Einflusse einer constanten Wärmequelle v aus, deren Temperatur über der des Körpers liegt, so wird offenbar die nächste Folge sein, dass seine Temperatur zu steigen beginnt. Nach einiger Zeit wird jedoch ein Moment eintreten, wo keine Wärmeänderung mehr wahrzunehmen ist, d. h. wo die bestrahlte Oberfläche des Körpers von Seiten der Wärmequelle ebensoviele Wärmeeinheiten empfängt, als sie an die ihr benachbarten inneren Moleküle abgiebt. Wird an der Wärmequelle nichts geändert, so bleibt von nun an die Temperatur der Oberfläche constant. Nehmen wir aber an, die zugestrahlte Wärmeenergie vermehre sich im nächsten Zeitmoment um einen Betrag dv, so wird die Temperaturzunahme der Oberfläche dieser Grösse proportional sein. Wenden wir dies auf den Fall an, dass die Wärmequelle durch die Sonne vorgestellt werde, deren zur Erdoberfläche gelangende Wärmeenergie durch die Gleichung (4) ausgedrückt wurde, so ist die Temperaturänderung in letzterer während der Zeit dz proportional dem Ausdrucke

$$\frac{dI}{dz}\,dz = a\,A\,\frac{d.\cos Z}{dz}\,dz$$

zu setzen. Demnach gehen für die Zeit von Sonnenaufgang bis Sonnenuntergang die Weilenmann'schen Differentialgleichungen in die folgenden über:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dt'}{dz} &= -h\,(t'-u) + h\,(t-t') + K\,.\,\frac{d\cos Z}{dz}\\ \frac{dt}{dz} &= -h\,(t-t')\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

worin K eine Constante bedeutet, welche von der Solarconstanten, sowie von der Dichte und specifischen Wärme des Bodens abhängt. Berücksichtigt man die Relation

$$\cos Z = \sin\varphi\,.\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos\zeta \qquad (13)$$

wo φ die Polhöhe des Beobachtungsortes, δ die Declination und ζ den Stundenwinkel der Sonne bedeutet, und betrachtet δ für den Verlauf eines Tages als Constante, so ist offenbar

$$K\,.\,\frac{d\cos Z}{dz} = -K\cos\varphi\cos\delta\,.\sin\zeta = -K_0\sin\zeta.$$

Nach dieser Umformung lauten die Gleichungen (12)

$$\left.\begin{aligned}\frac{dt'}{dz} &= -h\,(t'-u) + h\,(t'-t) - K_0\sin\zeta\\ \frac{dt}{dz} &= -h\,(t-t')\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Eliminirt man aus diesen t', so erhält man als Differentialgleichung für t:

$$\frac{d^2\,(t-u)}{dz^2} + 3h\,\frac{d\,(t-u)}{dz} + h^2\,(t-u) = -h\,.\,K_0\sin\zeta. \qquad (15)$$

Diese nichthomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung kann aber in einfacher Weise gelöst werden. Es ist bekannt, dass das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + m\,.\frac{dy}{dx} + n\,.\,y = X$$

wo m und n Constante bedeuten, während X eine Function der unabhängigen Variablen x vorstellt, durch den Ausdruck

$$y = c_1\,.\,e^{\lambda_1 x} + c_2\,.\,e^{\lambda_2 x} + \frac{e^{\lambda_1 x}}{\lambda_1-\lambda_2}\int e^{-\lambda_1 x}\,X dx - \frac{e^{\lambda_2 x}}{\lambda_1-\lambda_2}\int e^{-\lambda_2 x}\,X dx$$

dargestellt wird. Hierin sind c_1 und c_2 willkürliche Constanten, λ_1 und λ_2 die Wurzeln der Gleichung

$$\lambda^2 + m\lambda + n = 0.$$



Durch Einsetzen der Werthe unserer Differentialgleichung erhalten wir

$$t = u + c_1 e^{\lambda_1 z} + c_2 e^{\lambda_2 z} - \frac{h \cdot K_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[e^{\lambda_1 z} \int e^{-\lambda_1 z} \sin \zeta \, dz - e^{\lambda_2 z} \int e^{-\lambda_2 z} \sin \zeta \, dz \right] \qquad (16)$$

$$\lambda^2 + 3 h \lambda + h^2 = 0$$

worin $\zeta = z - \tau$; τ der halbe Tagebogen der Sonne.

Nun ist allgemein:

$$\int e^{ax} \sin x \, dx = e^{ax} \cdot \frac{a \sin x - \cos x}{1 + a^2}.$$

Diese Formel auf die Integrale der Gleichung (16) angewandt, ergiebt

$$t = u + c_1 e^{\lambda_1 z} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 z} + \frac{h \cdot K_0}{(1 + \lambda_1^2)(1 + \lambda_2^2)} \left\{ (1 - \lambda_1 \lambda_2) \sin \zeta - (\lambda_1 + \lambda_2) \cos \zeta \right\}.$$

Berücksichtigt man schliesslich noch, dass

$$\lambda_1 = -0.382 h; \; \lambda_2 = -2.618 h$$

und setzt zur Vereinfachung:

$$\frac{h \cdot K_0}{1 + 7 h^2 + h^4} = a_0 = a \cos \varphi \cdot \cos \delta,$$

so erhält man

$$t = u + c_1 \cdot e^{-0.382 hz} + c_2 \cdot e^{-2.618 hz} + a_0 \left\{ (1 - h^2) \sin \zeta + 3 h \cos \zeta \right\} \qquad (17)$$

als das allgemeine Integral der Differentialgleichung (15).

Nun ist aber wohl zu beachten, dass der Giltigkeitsbereich der Differentialgleichungen (14) beschränkt ist und sich nur vom Aufgang bis zum Untergang der Sonne erstreckt. Da die rechte Seite der Gleichung (15) in diesen Punkten eine Unterbrechung ihrer Stetigkeit erleidet, dürfen wir nur das specielle Integral

$$\Big[t - u \Big]_{\zeta = -\tau}^{\zeta} = \Big[c_1 e^{-0.382 hz} + c_2 e^{-2.618 hz} \Big]_{z=0}^{z} + a_0 \Big[(1 - h^2) \sin \zeta + 3 h \cos \zeta \Big]_{\zeta = -\tau}^{\zeta} \qquad (18)$$

in den Bereich der Betrachtungen ziehen. Nennen wir t_ζ die Temperatur für einen beliebigen Zeitmoment innerhalb der Grenzen $-\tau$ und $+\tau$, $t_{-\tau}$ die Temperatur bei Sonnenaufgang, so ist

$$t_\zeta = t_{-\tau} + \Big[c_1 e^{-0.382 hz} + c_2 \cdot e^{-2.618 hz} \Big]_0^z + a_0 \Big[(1 - h^2) \sin \zeta + 3 h \cos \zeta \Big]_{-\tau}^{\zeta}.$$

Die Temperatur $t_{-\tau}$ bildet aber andererseits auch den Grenzpunkt der Nachtcurve, d. h. sie muss der Gleichung (9)

$$t = u + c_1 \cdot e^{-0.382 hz} + c_2 e^{-2.618 hz} \qquad (19)$$

genügen. Indem wir den Anfangspunkt der Integration auch für die Nacht-

curve auf Sonnenaufgang legen, d. h. z von diesem Punkte nach rückwärts zählen, erhalten wir für $t_{-\tau}$ aus der Gleichung (19)

$$t_{-\tau} = u + c_1 + c_2 \tag{20}$$

und unsere Gleichung nimmt die Form an:

$$t_\zeta = u + c_1 e^{-0.382\,hz} + c_2 e^{-2.618\,hz} + a_0 \Big[(1-h^2)\sin\zeta + 3h\cos\zeta\Big]_{-\tau}^{\zeta}. \tag{21}$$

Die Relation (20) drückt offenbar die Bedingung dafür aus, dass die Tagescurve sich in stetiger Weise an die nächtliche Curve anschliesse.

Die rechte Seite von (21) besteht aus zwei wesentlich verschiedenen Theilen. Der Ausdruck

$$c_1 \,.\, e^{-0.382\,hz} + c_2 e^{-2.618\,hz} \tag{22}$$

ist von dem Gesetze der Sonnenstrahlung unabhängig und stellt, ebenso wie bei der Nachtgleichung, in Folge der negativen Exponenten eine Temperaturabnahme vor. Man könnte zwar unter der Voraussetzung, dass die willkürlichen Constanten c_1 und c_2 negativ seien, den Ausdruck (22) als Wärmezunahme auffassen. Allein die Bedingung, dass diese Constanten der Gleichung (20) und folglich auch der Nachtcurve entsprechen sollen, schliesst eine solche Annahme von vornherein aus.

Andererseits aber würde die Annahme, dass (22) eine abnehmende Function darstelle, nur in dem Falle berechtigt sein, dass die Temperatur der äussersten Bodenschicht trotz der eingestrahlten Wärmemengen fortwährend unter derjenigen der benachbarten Luftschicht sich befinde. Die Beobachtungen lehren aber, dass während der ganzen Zeit, wo die Sonne über dem Horizont steht, die Erdoberfläche einen recht bedeutenden Wärmeüberschuss gegenüber der untersten Atmosphäre besitzt, demnach in keinem Augenblicke genöthigt sein wird, ihren Wärmeverlust auf Kosten der untersten Luftschicht zu decken. Demnach würde also die Annahme positiver Constanten, wie sie durch die Bedingung (20) gefordert wird, zu einem Widerspruche mit den beobachteten Thatsachen hinführen.

Dieser Widerspruch wird indessen vermieden, wenn man bedenkt, dass schon vor Aufgang der Sonne die Sonnenstrahlen ihre thermische Wirkung beginnen. Schon mit Anfang der Dämmerung werden Wärmestrahlen zugleich mit dem zerstreuten Tageslichte ihren Weg zur Erde finden, während andere in der Atmosphäre absorbirt werden. Auf die allgemeine Weilenmann'sche

Gleichung (9) wird dies den Einfluss haben, dass die Constanten c_1 und c_2 fortwährend verkleinert, dagegen die Temperatur u erhöht wird. Schliesslich wird ein Augenblick eintreten, für welchen diese Constanten verschwinden, während u in einen höheren Werth u_0 übergeht, so dass für diesen Moment die Gleichung gilt:

$$t = t' = u_0,$$

welche, da im nächsten Augenblicke bereits die Einstrahlung überwiegt, zugleich die Bedingung für das Temperaturminimum ausspricht.

Diese Ueberlegungen zwingen uns, die Gleichung (21) nur unter der Bedingung als brauchbaren theoretischen Ausdruck des Temperaturvorganges anzusehen, dass ihr zweiter Theil

$$a_0 \Big[(1-h^2) \sin \zeta + 3h \cos \zeta\Big]_{-\tau}^{\zeta}$$

für sich allein die in der Natur beobachteten Temperaturänderungen, so lange sich die Sonne über dem Horizont befindet, wiedergeben kann.

In der That zeigten alle zur Prüfung herangezogenen Beobachtungen — wir werden bei der speciellen Untersuchung näher darauf eingehen —, dass der Ausdruck

$$t = u_0 + a_0 \Big[(1-h^2) \sin \zeta + 3h \cos \zeta\Big]_{-\tau}^{\zeta} \tag{23}$$

die zeitlichen Temperaturschwankungen mit grosser Schärfe darzustellen vermag.

Die Gleichung (23) kann in der etwas einfacheren Form geschrieben werden:

$$t = t_0 + \alpha_0 . \cos (\zeta - v) \tag{23a}$$

wenn man

$$t_0 = u_0 - \alpha_0 \cos (\tau + v)$$

setzt und α_0 und v durch die Gleichungen

$$a_0 (1-h^2) = \alpha_0 \sin v$$
$$a_0 . 3h = \alpha_0 \cos v$$

bestimmt. Die Curve, welche der Gleichung (23) entspricht, hat ein Maximum bei $\zeta = v$. Da nun v durch die Relation

$$\operatorname{tg} v = \frac{1-h^2}{3h} \tag{24}$$

bekannt ist, die Grösse h aber sich aus den Weilenmann'schen Berechnungen der Nachtbeobachtungen zu 0.375 ergeben hat, so lässt sich die Eintrittszeit des Maximums theoretisch bestimmen. Wir finden $v = 37^\circ\ 23' =$

$2^h\ 29^m.5$ p. m.; ein Werth, der mit dem mittleren beobachteten gut übereinstimmt.

Die bisherigen Ueberlegungen hatten zur Voraussetzung, dass ausser den besprochenen keine anderen Wärmeursachen auf den Temperaturgang einwirken. Während die schon angedeutete Untersuchung des Einflusses der Luftfeuchtigkeit und Bewölkung, durch welchen die Gestalt der Gleichung (23) verändert wird, dem nächsten Paragraphen vorbehalten bleibt, soll hier zunächst auf einige störende Ursachen kurz hingewiesen werden, welche ihren Einfluss nur auf die Grösse der in (23) vorkommenden Parameter äussern. Es ist bekannt, dass sowohl die Grösse der täglichen Amplitude, als auch die Eintrittszeit des Temperaturmaximums von der klimatischen Lage des Beobachtungsortes abhängen; beide Argumente bilden bislang die besten Kriterien dafür, ob und wieweit das Klima eines Ortes zum continentalen oder maritimen Charakter hinneige. Bekanntlich erwärmt sich die Atmosphäre über einer Wasserfläche in bedeutend geringerem Grade, als über dem Festlande. Das Emporsteigen der wärmeren Landluft hat ein Nachströmen der kälteren Seeluft längs der Erdoberfläche zur Folge. Diese letztere aber entzieht dem Erdboden so viel von seiner Wärme, als nöthig ist, um sie auf die Temperatur ihrer Umgebung zu erheben. Nun dürfen wir jedenfalls annehmen, dass diese Wärmemenge dem Temperaturunterschiede zwischen Land- und Seeluft proportional sei, d. h. sich etwa durch einen Ausdruck

$$dk_0 \cos(\zeta - w)$$

darstellen lasse, wo w die Eintrittszeit der höchsten Tageswärme der Luft über dem Lande bedeutet, also von v nicht erheblich verschieden ist. Unsere Differentialgleichungen erhalten demnach in diesem Falle die Form:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dt'}{dz} &= -h(t'-u_0) + h(t-t') - k_0 \sin\zeta + dk_0 \sin(\zeta - w) \\ \frac{dt}{dz} &= -h(t-t') \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

welche auf die Gleichung

$$\frac{d_2(t-u_0)}{dz^2} + 3h\frac{d(t-u_0)}{dz} + h_1^2(t-u_0) = -h\left\{k_0 \sin\zeta - dk_0 \sin(\zeta - w)\right\}$$

hinführen. Dementsprechend stellt der Ausdruck

$$t = t_0 + \alpha_0 \cos(\zeta - v) - d\alpha_0 \cos(\zeta - v - w) \tag{26}$$

den Temperaturverlauf in der untersten Luftschicht dar. Setzen wir

$$\begin{aligned} \alpha_0 \sin v - d\alpha_0 \sin (v+w) &= \alpha'_0 \sin v' \\ \alpha_0 \cos v - d\alpha_0 \cos (v+w) &= \alpha'_0 \cos v' \end{aligned} \tag{27}$$

so geht Gleichung (26) über in

$$t = t_0 + \alpha'_0 \cos (\zeta - v'), \tag{28}$$

welche in der Form mit (23^a) übereinstimmt.

Zunächst geht aus (23^a) und (28) hervor, dass die Temperaturcurve an der Küstenstation einen ebeneren Verlauf nimmt, als an einer Station des inneren Landes, wo wegen der gleichmässigen Erwärmung der Unterlage auf weite Strecken hin die hier besprochene kältere Luftströmung in den untersten Regionen nicht auftreten kann. Zugleich aber zeigt die aus (27) folgende Relation

$$\operatorname{tg} v' = \frac{(\alpha_0 - d\alpha_0 \cos w) \sin v - d\alpha_0 \cos v \sin w}{(\alpha_0 - d\alpha_0 \cos w) \cos v + d\alpha_0 \sin v \sin w} < \operatorname{tg} v$$

dass v', so lange $w > o$ ist, d. h. die Differenz zwischen Land- und Seeluft ihr Maximum nach Mittag erreicht, kleiner als v sein muss. Bekanntlich bestätigen die Beobachtungen, dass an Küstenplätzen das Temperaturmaximum früher eintritt, als an Stationen des inneren Continents.

Auf hohen, freigelegenen Bergen werden die kälteren Strömungen aus dem umgebenden freien Luftmeere dieselbe Wirkung hervorrufen; desgleichen dürfte sich auch mit Hilfe derselben Vorstellungen die auf continentalen Stationen beobachtete Verfrühung des Maximums im Winter erklären lassen. Der Umstand, dass die jährlichen Schwankungen der Eintrittszeit der höchsten Tageswärme in hohen Breiten auffallender erscheinen, als nach dem Süden hin (man vergleiche in dem citirten Wild'schen Werke beispielsweise Archangelsk und Barnaul mit Tiflis und Peking), lässt darauf schliessen, dass der Wärmeverbrauch bei Schmelzung des Schnees etc. die Ursache der abweichenden Erscheinungen sein könne. Da der wärmeentziehende Einfluss des Seewindes in der heissen Jahreszeit am stärksten sein wird, im Winter dagegen zurücktritt; da aber dann an seine Stelle (in mittleren und nördlichen Breiten) die zuletzt erwähnte absorbirende Wirkung der gefrorenen Wassertheile treten wird, so scheint es erklärlich, dass die Eintrittszeit des Temperaturmaximums im maritimen Klima während des ganzen Jahres gleichmässiger und durchweg früher, als im continentalen ist.

In Städten, besonders wenn das Thermometer an einem der Sonnenwirkung allzusehr entzogenen Orte aufgestellt ist, wird häufig die umgekehrte

Erscheinung, eine Verspätung des Maximums, beobachtet, deren Ursache wohl am ehesten in der dasselbe Gesetz wie vorher befolgenden Wärmeabsorption zu vermuthen ist, welche die erwärmte Luft seitens der sie einschliessenden Gegenstände (Mauern der Häuser etc.) zu erdulden hat. In diesem Falle würden demnach unsere Gleichungen etwa die Form haben:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dt'}{dz} &= -h(t'-u)+h(t-t') - k_0 \sin\zeta \\ \frac{dt}{dz} &= -h(t-t') + dk_0 \sin(\zeta-w) \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

und hieraus würde eine Differentialgleichung zweiter Ordnung folgen von der Form:

$$\frac{d^2(t-u_0)}{dz^2} + 3h\frac{d(t-u_0)}{dz} + h^2(t-u_0) = -hk_0 \sin\zeta + dk_0 \cos(\zeta-w). \qquad (30)$$

Mit Rücksicht auf die Relation

$$\int e^{ax}\cos x\,dx = e^{ax}\,.\,\frac{\sin x + a\cos x}{1+a^2}$$

ergiebt sich aus (30) die Temperaturgleichung:

$$t = t_0 + \alpha_0\cos(\zeta-v) + d\alpha_0\sin(\zeta-v-w). \qquad (31)$$

Die Bedingung für das Maximum

$$-\alpha_0\sin(\zeta-v) + d\alpha_0\cos(\zeta-v-w) = 0$$

zeigt, dass $(\zeta-v)$ ein positiver Winkel sein muss, so lange w zwischen $\pm\ 90^\circ$ liegt.

§ 4.

Wir wollen nunmehr der Frage näher treten, welche Gestalt die Temperaturgleichung annimmt, wenn wir den Einfluss des Feuchtigkeitszustandes der Atmosphäre auf die Sonnenstrahlung berücksichtigen. Die im § 1 erwähnten directen Intensitätsmessungen des Herrn Crova — meines Wissens die einzigen Versuche, die eingestrahlte Sonnenwärme fortlaufend zu registriren —, welche ja aufs bestimmteste zeigen, dass der Wasserdampf in der Atmosphäre in unserem Problem eine bedeutende Rolle spielen muss, sind leider zur präcisen Aufstellung eines Gesetzes über die täglichen Schwankungen dieses Factors nicht ausreichend. Ich glaube, dass wir entschieden zu sicheren Grundlagen geführt werden durch das Studium eines, dem fraglichen verwandten meteorologischen Elementes, das sich bisher einer sorgfältigeren Beachtung erfreuen durfte: der Bewölkung. Die Theorien über den täglichen Gang der Bewölkung sind ja direct auf diejenigen der atmosphärischen

Feuchtigkeit gegründet. Freilich ist es nicht erlaubt, die Grösse der Bewölkungsamplitude mit demselben Maassstabe zu messen, wie die Amplitude der Feuchtigkeit. Was wir als Schwankungen der Grösse der sichtbaren Wolkenhülle mit unserem Auge wahrnehmen, ist nur ein sehr verkleinertes Bild der Aenderungen, die sich zur gleichen Zeit in dem Feuchtigkeitszustande der gesammten Atmosphäre vollziehen. Allein hier kommt es uns zunächst nur auf das Gesetz der täglichen Schwankungen, nicht auf ihre absolute Grösse an.

Soweit wir aus den bis jetzt vorliegenden Beobachtungen schliessen dürfen, scheint der tägliche Gang der Bewölkung sich in zwei Extreme einzuordnen, die folgendermaassen charakterisirt sind. Während im Winter das Maximum der Bewölkung bei Sonnenaufgang liegt, welchem eine fortdauernde Abnahme bis zum Abend folgt, bemerken wir im Sommer im Gegentheil von Sonnenaufgang an eine Zunahme der Bewölkung, welche ihr Maximum ungefähr zur Zeit des höchsten Sonnenstandes erreicht, um von da ab wieder stetig abzunehmen. Die folgenden Beobachtungen zeigen dieses verschiedenartige Verhalten sehr deutlich:

	Helsingfors			Dorpat			Crefeld			Stuttgart	
	Winter	Sommer		Januar	Juli		Januar	Juni		Winter	Sommer
7 a.	8.0	4.8	7 a.	8.3	4.1	7 a.	8.2	6.6	7 a.	7.8	5.7
9	8.0	4.9	10	8.2	5.6	9	7.7	6.7			
11	7.8	5.4	1 p.	8.2	6.0	11	7.6	7.0	2 p.	7.0	6.2
1 p.	7.6	5.3	4	8.1	5.6	1 p.	7.6	7.0			
3	7.8	5.0	7	7.6	5.1	3	7.4	6.8	9 p.	6.8	5.4
5	7.6	4.6	10	7.8	4.5	5	7.3	6.7			
7	7.5	4.6				7	6.9	6.4			

Herr Wild giebt in seiner Abhandlung: Ueber die Bewölkung Russlands (Rep. f. Met. t. II), der Plantamour'schen Hypothese folgend, eine sehr wahrscheinliche Erklärung dieser Erscheinungen. Er sagt auf p. 271: „An den Orten und zu den Jahreszeiten, wo der aufsteigende Luftstrom ganz zurücktritt, also im Norden und im Winter, wird sich der tägliche Gang der Bewölkung ganz dem der Temperatur und dem entsprechenden der relativen Feuchtigkeit in der Art anschliessen, dass das Maximum der Bewölkung zur Zeit des Temperaturminimums resp. Feuchtigkeitsmaximums eintritt und die geringste Bewölkung in den ersten Nachmittagsstunden, wo die höchste Temperatur oder geringste Feuchtigkeit stattfindet. Wenn hingegen an einem

Orte oder zu irgend einer Jahreszeit die Wirkung des aufsteigenden Luftstromes ganz die des täglichen Ganges der Temperatur überwiegt, so werden wir umgekehrt kurz vor Sonnenaufgang, ehe der aufsteigende Luftstrom beginnt, und am Abend, wenn er wieder aufhört, die geringste Bewölkung haben und dagegen ein Maximum derselben zur Zeit des Temperaturmaximums, wo er sich am stärksten manifestirt, erhalten. Indem nämlich der aufsteigende Luftstrom die warme und mehr oder minder feuchte Luft von der Erdoberfläche in die Höhe führt, wird durch die dabei erfolgende Expansion eine starke Abkühlung und in Folge dessen eine theilweise Condensation des Wasserdampfes erfolgen. Die letztere aber oder also die Bildung von Wolken wird um so stärker sein, je höher die Luft steigt oder je grösser eben die Temperaturerhöhung an der Erdoberfläche war."

Ein kleiner Widerspruch zwischen Theorie und Beobachtungen scheint indessen vorzuliegen. Das Maximum der Bewölkung im Sommer liegt durchweg früher als das Temperaturmaximum, etwa kurz nach Mittag. Allein dieser Widerspruch scheint sofort beseitigt, wenn man bedenkt, dass die Grösse der Bewölkung nicht nur von der Intensität des aufsteigenden Luftstromes, sondern auch von dem absoluten Feuchtigkeitsgehalte der emporgeführten Luftmassen abhängt. Herr Wild hat nun aber in seiner Arbeit: „Ueber den täglichen und jährlichen Gang der Feuchtigkeit in Russland" (Rep. f. Met. t. IV) nachgewiesen, dass der Zeitpunkt des absoluten Feuchtigkeitsmaximums bei continental gelegenen Orten ganz erheblich früher, als derjenige der höchsten Tageswärme liegt. Er giebt p. 31 hierfür folgende Erklärung:

„Der im Laufe des Vormittags sich entwickelnde und zur Zeit der höchsten Tageswärme sein Maximum erreichende aufsteigende Luftstrom führt am betreffenden Orte die Luft von der Erdoberfläche in die höheren Schichten der Atmosphäre und bewirkt so unten ein Herbeiströmen neuer Luft aus benachbarten Gegenden. Ist in Folge geringerer Erwärmung des Erdbodens dieser aufsteigende Strom überhaupt schwach und kommt die unten zum Ersatze herbeiströmende Luft unmittelbar von ausgedehnten Wasserflächen her, wie dies bei auf Inseln und unmittelbar an Küsten gelegenen Orten der Fall sein wird, so wird, wie die Erfahrung es bestätigt, die Austrocknung der Luft eine beschränkte sein, d. h. trotz der beständigen Abnahme der relativen

Feuchtigkeit bis zur Zeit des Temperaturmaximums doch bis dahin auch eine beständige Zunahme der absoluten Feuchtigkeit erfolgen. Bei continentaler Lage dagegen wird nicht nur der aufsteigende Luftstrom intensiver, sondern die zum Ersatze herbeiströmende Luft hat, indem sie über mehr oder minder trockenes Land hinstreicht, weniger die Möglichkeit, von diesem durch Verdunstung Wasserdämpfe aufzunehmen, und so sehen wir an solchen Orten eine so intensive Verminderung der relativen Feuchtigkeit eintreten, dass um die Zeit des Temperaturmaximums auch eine Abnahme der absoluten Feuchtigkeit erfolgt."

Mit diesen Bemerkungen scheint das frühere Eintreten der höchsten Bewölkung in den Sommermonaten hinreichend erklärt zu sein.

Wie schon bemerkt, ordnen sich für continentale Orte alle Tagescurven der Bewölkung zwischen die besprochenen Extreme ein, und zwar in der Weise, dass sich sowohl die Amplitude als auch die Eintrittszeit der höchsten Bewölkung fortwährend in gesetzmässiger Weise ändert. Nennen wir n die Bewölkung, n_0 ihren mittleren Zustand zu einer bestimmten Tageszeit, so wird sich der tägliche Gang gewiss durch die Bessel'sche Gleichung:

$$n = n_0 + dn_1 \cos(\zeta - u_1) + dn_2 \cos(2\zeta - u_2) + \dots$$

ausdrücken lassen. Wir dürfen aber nach den mitgetheilten Beobachtungen wohl annehmen, dass zur Darstellung desjenigen Curventheiles, der zwischen Sonnen-Auf- und -Untergang liegt, bereits der einfache Winkel genügen wird, und schreiben unsere Formel demgemäss:

$$n = n_0 + dn \cos(\zeta - u) \qquad (32)$$

wo u die Eintrittszeit des Maximums resp. Minimums der Bewölkung bedeutet, je nachdem dn eine positive oder negative Grösse vorstellt. Den vorhergehenden Ausführungen gemäss wird also dn im Januar seinen grössten negativen, im Juli seinen grössten positiven Werth erreichen, während u im ersteren Falle auf den späten Nachmittag, im letzteren dagegen nicht erheblich nach der Culmination der Sonne zu liegen käme. Zwischen diesen beiden Extremen wird die jährliche Curve der dn zweimal, im Frühjahr und Herbst, durch 0 gehen. Zum Beweise führe ich die mehrjährigen Bewölkungsmittel von Wien an, welche von Herrn Hann in den Sitzungsberichten der Wiener Akademie der Wissenschaften 1881 Februar veröffentlicht worden sind. Herr Hann hat unter diesen Beobachtungen drei Typen constatirt,

welche sich am besten durch folgende Zahlen (Abweichungen vom Tagesmittel) darstellen lassen:

	6 a	10 a	2 p	6 p
October bis Februar	+48	+34	00	−06
März, April, Juli bis September	+25	+11	+37	+12
Mai und Juni	−18	+21	+58	+35.

Diese Zahlen bedürfen kaum einer weiteren Erklärung; sie zeigen aufs Deutlichste die vermittelnde Stellung der Frühlings- und Herbstmonate zwischen den Sommer- und Winterextremen.

Die nächste zu entscheidende Frage ist nun, in welchem Maasse die Sonneneinstrahlung durch eine Wolkenschicht verringert wird. Diese Frage analytisch zu behandeln, dürfte bei dem jetzigen Stande unserer Kenntnisse über die thermischen Vorgänge in den höheren Schichten der Atmosphäre, die Wärmeabsorption und Zerstreuung durch die Hydrometeore u. s. w. wohl kaum zu erreichen sein. Die Clausius'sche Theorie hierauf zu erweitern, könnte ja vielleicht Erfolg haben; allein ein Blick in die weitläufigen Zenker'schen Ueberlegungen und Rechnungen, welche das Problem ja erst in seiner einfachsten Form bei wolkenloser Atmosphäre mit ganz gleichförmiger, möglichst geringer Feuchtigkeit behandeln, lässt an der mathematischen Durchführung dieser Aufgabe berechtigte Zweifel aufkommen. Ich glaube nun aber in den folgenden Paragraphen über das fragliche Gesetz der Verminderung der Sonnenstrahlung durch eine Wasserdampf-(Wolken-)Schicht von bekannter Dichtigkeit einen empirischen Aufschluss geben zu können, der für unser Temperaturproblem vollkommen ausreichend ist. Die Beobachtungen ergeben, dass — von kleinen Anomalien abgesehen, deren Ursache an späterer Stelle besprochen wird — die Temperaturcurve bei allen Bewölkungsgraden durch eine Gleichung:

$$t = t_0 + \alpha_n \cos(\zeta - v);\ \operatorname{tg} v = \frac{1-h^2}{3h}$$

annähernd dargestellt wird. Die Constante α_n steht aber zur Bewölkung n in der einfachen linearen Beziehung:

$$\alpha_n = \alpha_0\,(1-\beta\,.\,n), \tag{33}$$

wo α_0 der Bewölkung 0 (heiter) entspricht und β eine Grösse vorstellt, die für alle Orte gleich zu sein scheint. Sind also I_n und I_0 die entsprechenden Werthe der Sonnenintensität, so dürfen wir, die Richtigkeit der Formel (33)

4*



vorläufig annehmend, den weiteren Betrachtungen die Gleichung:

$$I_n = I_0 (1 - \beta n) \qquad (34)$$

zu Grunde legen. Setzen wir hierin für n den Werth der Gleichung (32) ein, so erhalten wir:

$$I_n = I_0 \left[1 - \beta n_0 - \beta dn \cos(\zeta - u)\right]. \qquad (35)$$

Da nun aber nach den Zenker'schen Rechnungen

$$I_0 = A (a \cos Z - b) \qquad (36)$$

wo A die ausserhalb der Atmosphäre senkrecht eingestrahlte Sonnenintensität bezeichnet, so führt eine Substitution von (36) in (35) nach mehrfachen Vereinfachungen zu einer Gleichung:

$$I_n = I \cos \zeta + dI_1 \cos(\zeta - u) + dI_2 \cos \zeta . \cos(\zeta - u) + dI_3 . \qquad (37)$$

Wir haben bereits den Einfluss des zweiten Summanden der rechten Seite auf das Temperaturintegral im vorigen Paragraphen an der Stelle erwähnt, wo von der Verschiebung der Eintrittszeit des Maximums gesprochen wurde. Nebenbei bemerkt, wird bei einer numerischen Ausgleichung der Beobachtungen derselbe von dem ersten Summanden natürlich nicht zu trennen sein und kann daher, wenn u ein grosser Winkel ist, die Bestimmung der Grösse h stark verfälschen. Da indessen u mit Hilfe des dritten Summanden ermittelt werden kann, so lässt sich dieser Fehler immer genügend überschätzen. Den Factor dI_1 auf anderem Wege zu bestimmen und ihn als bekannt in die Ausgleichung einzuführen, dürfte wohl bei dem jetzigen Stande unserer Kenntniss der Sonnenstrahlung unmöglich sein. Wenn wir daher schon aus diesen Gründen auf eine weitere Betrachtung dieses zweiten Summanden der Gleichung (37) verzichten müssen, so giebt uns hierzu auch noch der Umstand Veranlassung, dass, wie wir noch sehen werden, in den meisten Fällen u ein kleiner Winkel ist und gerade im Sommer, wo die tägliche Schwankung der Bewölkung und Luftfeuchtigkeit am beträchtlichsten ist, sein Minimum erreicht.

Mit Rücksicht auf diese Vereinfachungen werden nun unsere Differentialgleichungen lauten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dt'}{dz} &= -h(t'-u) + h(t-t') - k_n \sin \zeta + dk_n \sin(2\zeta - u) \\ \frac{dt}{dz} &= -h(t-t') \end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

$$k_n = (1-\beta n_0) k \cos\varphi \cos\delta; \quad dk_n = k.\beta dn \cos\varphi \cos\delta$$

und hieraus die Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{d^2(t-u)}{dz^2} + 3h\frac{d(t-u)}{dz} + h^2(t-u) = -h\left\{k_n \sin\zeta - dk_n \sin(2\zeta - u)\right\}.$$

aus welcher die folgende Gleichung für den Temperaturverlauf:

$$t = t_0 + a_n \cos(\zeta - v) - da_n \cos(2\zeta - u - w) \tag{39}$$

hergeleitet wird, wo

$$a_n = k_n \cdot \frac{h}{\sqrt{1+7h^2+h^4}}; \quad da_n = dk_n \frac{h}{\sqrt{16+28h^2+h^4}}$$

$$\operatorname{tg} v = \frac{1-h^2}{3h}; \quad \operatorname{tg} w = \frac{4-h^2}{6h}.$$

Wir werden nunmehr zu untersuchen haben, bis zu welchem Grade von Genauigkeit die Beobachtungen durch diese Gleichung wiedergegeben werden. Es ist besonders zu betonen, dass die letztere keine willkürliche Constante enthält, dass vielmehr sämmtliche vorkommende Parameter eine ganz bestimmte physikalische Bedeutung haben. Zunächst wird sich zu erweisen haben, dass $a_n \sec\delta$ für gleiche Bewölkungsgrade und denselben Beobachtungsort während des ganzen Jahres — die extremen Wintermonate wegen des besprochenen, zur Schmelzung der gefrorenen Wassertheile nöthigen Wärmeverbrauches ausgenommen — constant sei.

Da der Winkel v unter normalen Umständen lediglich von der Grösse h abhängt, diese aber bereits aus den Nachtbeobachtungen von Herrn Weilenmannn für jedweden Beobachtungsort und Bewölkungsgrad als constant erwiesen wurde, so wird v, welches in der Hauptsache die Eintrittszeit des Temperaturmaximums darstellt, sich als ein von Jahreszeit, Beobachtungsort und Bewölkung unabhängiger Winkel ergeben müssen. Die Fälle, welche von dieser Forderung auszunehmen sind, wurden im letzten Theile des dritten Paragraphen besprochen.

Ferner muss sich da_n der Feuchtigkeitsschwankung dn analog verhalten, d. h. im Laufe des Jahres eine Curve beschreiben, welche im Frühling und Herbst durch Null geht und im Sommer ihren grössten positiven, im Winter ihren grössten negativen Werth erreicht, und endlich wird u, nach unserer Definition die Eintrittszeit des täglichen Maximums (da_n positiv) oder Minimums (da_n negativ) der Bewölkung und Luftfeuchtigkeit, in genügender Uebereinstimmung mit den aus directen Bewölkungs- und Feuchtigkeitsmessungen ermittelten Werthen zu finden sein.

§ 5.

An die Spitze der zur Prüfung der vorliegenden theoretischen Untersuchungen herangezogenen Beobachtungen möchte ich stündliche Pariser Beobachtungen, bei völlig klarem Himmel gemessen, stellen, welche Herr Angot in den „Annales du bureau central météorologique de France Année 1888“ zur Untersuchung des Einflusses der Bewölkung auf die Lufttemperatur berechnet hat. Bei der Beurtheilung ist die geringe Zahl der Beobachtungstage — Maximum 63, Minimum 17 — wohl zu berücksichtigen. Trotzdem geben die im Folgenden mitgetheilten Zahlen eine gute Vorstellung von der Bedeutung der Gleichung (39):

	a_0	da_0	v	u	a_0 nach (40)
Januar . .	$+7.4^\circ$	-1.7°	14°	2.9^h p. m.	$+8.9^\circ$
Februar . .	9.5	-1.5	21	4.4 p.	9.3
März . . .	9.2	$+0.6$	40	1.4 p.	9.5
April . . .	9.5	$+1.1$	39	11.5 a.	9.4
Mai . . .	8.9	$+1.1$	35	11.0 a.	9.0
Juni . . .	8.6	$+1.2$	35	11.5 a.	8.7
Juli . . .	8.6	$+1.0$	36	11.2 a.	8.8
August . .	9.1	$+0.7$	34	11.7 a.	9.2
September .	9.6	$+0.4$	30	8.6 a.	9.5
October . .	10.1	-0.4	26	4.7 p.	9.4
November .	10.2	-1.1	15	6.0 p.	9.0
December .	$+5.9$	-1.5	12	2.2 p.	$+8.7$.

Die Grösse a_0 ist von der Declination der Sonne abhängig. Setzen wir:

$$a_0 = \alpha \, . \cos \delta \qquad (40)$$

so ist α für einen bestimmten Beobachtungsort während des ganzen Jahres eine Constante. Die letzte Columne enthält die nach dieser Formel mit einem mittleren Werthe $\alpha = 9.5^\circ$ berechneten a_0. Schliessen wir die Wintermonate aus früher bemerkten Gründen und wegen der bedeutenden Unsicherheit der Ausgleichungsrechnung aus, so kann die Darstellung in allen übrigen Monaten eine befriedigende genannt werden. Dasselbe Gesetz des jährlichen Ganges der Grösse a_0 ist bereits von Herrn Angot erkannt worden. (l. c. pag. 140 und 141.)

Die jährliche Variation der Grösse $d a_0$ entspricht ebenfalls den Forderungen, welche zu Ende des vorigen Paragraphen gestellt wurden; im Zusammenhang mit diesen Werthen belehrt uns die Columne der u, d. h. der

Eintrittszeit des täglichen Maximums resp. Minimums der Feuchtigkeit, dass das Maximum im Sommer mit überraschender Constanz auf etwa $11^{h}.3$ a. m. fällt, während das Minimum im Herbst und Winter durchweg in den Nachmittags- und Abendstunden zu finden ist.

Der Winkel v, welcher bekanntlich durch die Beziehung

$$\operatorname{tg} v = \frac{1-h^2}{3h}$$

definirt ist und demgemäss nur von der physikalischen Beschaffenheit der Unterlage abhängt, zeigt sich von März bis October leidlich constant. Der Grund, welcher in § 3 zur Erklärung der Abnahme dieses Winkels in den Wintermonaten angegeben wurde, darf uns auch hier wohl bestimmen, die Winterwerthe von einer so allgemeinen Betrachtung, wie die vorliegende, auszuschliessen.

Aber selbst wenn wir uns auf das Intervall von März bis October beschränken, muss uns ein Gang der Werthe von v, von einem Maximum zu Anfang nach einem Minimum zu Ende dieser Periode, auffallen. Um diese Erscheinung zu erklären, müssen wir uns daran erinnern, dass wir bei den theoretischen Betrachtungen auf die jährliche Periode der Temperatur keine Rücksicht genommen haben. Um den Einfluss dieser letzteren zu eliminiren, hat man schon des Oefteren vorgeschlagen, der Gleichung für den täglichen Gang ein Glied von der Form $\gamma . z$ beizufügen, wo γ eine Zahl bedeutet, die offenbar zur Zeit des Frühlingsäquinoctiums ihren grössten positiven, beim Herbstäquinoctium ihren grössten negativen Werth hat und bei den Solstitien annähernd Null wird. Es ist aber leicht zu ersehen, dass in einer Gleichung:

$$t = t_0 + a \sin \zeta + b . \cos \zeta + \gamma . \zeta,$$

da man wegen der geringen Grösse von γ statt $\gamma \zeta$ auch $\gamma . \sin \zeta$ setzen kann, der Coëfficient a erheblich stärker beeinflusst ist, als b. Nach dem über das Zeichen von γ Bemerkten wird daher das Verhältniss $\frac{a}{b}$ im Frühjahr grösser sein, als im Herbst, und da $\operatorname{tg} v = \frac{a}{b}$ ist, so findet der Unterschied dieses Winkels in beiden Jahreszeiten hierdurch eine ungezwungene Erklärung.

Die mitgetheilten Beobachtungen von Paris sollten nur den Zweck haben, eine übersichtliche Vorstellung zu geben, ob die theoretisch bestimmte Temperaturgleichung (39) die Thatsachen darzustellen vermag. Besonders geeignet schienen diese Beobachtungen deshalb, weil keine Rücksicht auf die



sichtbare Bewölkung zu nehmen war. Zur sicheren Bestimmung der Constanten von (39) ist jedoch ein weit umfangreicheres Material nöthig, als es den (auf so wenig Einzelwerthen beruhenden) Angot'schen Rechnungen zu Grunde liegt.

Um zunächst aus der Relation

$$\operatorname{tg} v = \frac{1-h^2}{3h}$$

die Constante h zu bestimmen, habe ich die stündlichen Beobachtungen von fünf Stationen mittels der Methode der kleinsten Quadrate berechnet. Streng genommen können wir auf einen genauen Werth dieser Grösse nach früheren Bemerkungen nur dann rechnen, wenn der Winkel $u = 0$ ist. Da indessen einerseits dieser Winkel im Allgemeinen nur klein ist, andererseits eine so exacte numerische Bestimmung des Coëfficienten h nicht der Zweck dieser Arbeit sein soll, indem es an dieser Stelle vielmehr darauf ankommt, die wesentliche Uebereinstimmung des aus Tagbeobachtungen abgeleiteten Werthes mit dem aus der nächtlichen Curve berechneten zu constatiren, so wurde der störende Einfluss der Feuchtigkeitsänderung auf den Winkel v nicht in Betracht gezogen. Die Grösse h ist dann gegeben durch eine der Wurzeln:

$$h = -\frac{3}{2}\operatorname{tg} v \pm \sqrt{\frac{9}{4}\operatorname{tg}^2 v + 1},$$

von denen, da h nach der Definition eine positive Zahl vorstellen muss, nur

$$h = -\frac{3}{2}\operatorname{tg} v + \sqrt{\frac{9}{4}\operatorname{tg}^2 v + 1}$$

in Betracht kommen kann. Nach dieser Formel wurden folgende Werthe für h gefunden:

	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Mittel
Tiflis I (10 Jahre) .	+0.381	402	360	353	378	409	340	349	377	416	352	417	+0.379
Tiflis II (10 Jahre) .	353	386	339	371	369	372	341	358	392	374	383	432	373
Peking (6 Jahre) . .	407	378	343	343	334	365	373	401	425	388	412	412	382
Barnaul (18 Jahre) .	—	406	398	398	396	366	393	400	396	396	480	—	403
Bern (7 Jahre) . . .	387	348	377	352	371	376	383	373	337	368	393	379	370
Mittel	+0.382	384	363	363	370	378	366	376	385	388	404	410	+0.381

Von Barnaul fehlen die December- und Januarwerthe, weil wegen des geringen Tagebogens die Rechnung zu unsicher wurde. Als einwurfsfrei können eigentlich auch hier nur die Monate März bis October gelten. Die Uebereinstimmung dieser Werthe mit den von Herrn Weilenmann aus Nacht-



beobachtungen abgeleiteten ist eine vollständige. Um die Abhängigkeit von der Bewölkung zu prüfen, habe ich in jedem Monat die Differenzen der Werthe von h für die extremen Bewölkungsgrade [1]) im Sinne Min. — Max. gebildet:

Jan. .	+ 0.020	April .	+ 0.046	Juli .	+ 0.020	Oct. .	+ 0.020
Febr. .	+ 30	Mai .	+ 25	Aug. .	+ 27	Nov. .	+ 19
März .	+ 21	Juni .	— 10	Sept. .	+ 19	Dec. .	+ 53

Die Differenzen sind klein, aber wohl als reell zu betrachten. Sie werden bestätigt durch eine Vergleichung mit den von Herrn Angot, l. c. p. B. 137 mitgetheilten Werthen des Winkels v für ganz heiteren und ganz bedeckten Himmel in Paris. Das Mittel der v von April bis September beträgt im ersteren Falle $34^\circ.8$, im letzteren $37^\circ.9$; die entsprechenden Werthe von h sind 0.402 und 0.370, also auch hier bei klarem Himmel ein grösserer Werth, als bei bedecktem. Indessen erscheint es gewiss verfrüht, hieraus bestimmte Schlüsse zu ziehen; vorläufig wird es wohl erlaubt sein, diese unbeträchtlichen Differenzen zu vernachlässigen und den Weilenmann'schen Werth 0.375 den weiteren Rechnungen zu Grunde zu legen.

Es scheint hier der geeignete Platz, die Genauigkeit zu erwähnen, mit welcher die Beobachtungen durch die Gleichung (39) dargestellt werden können. Soll diese Gleichung den Anforderungen genügen, so muss der in der Darstellung eines einzelnen Stundenwerthes übrig bleibende Fehler unter dem mittleren Beobachtungsfehler liegen. Leider ist es ein empfindlicher Mangel der meteorologischen Publikationen, dass sie über die Sicherheit der mitgetheilten Zahlen nur selten Aufschluss geben. Herr Wild theilt in seinem Werke „Ueber die Temperaturverhältnisse etc." nur für zwei Stationen (Petersburg und Helsingfors) die mittleren Abweichungen eines Einzelmittels vom Gesammtmittel ausführlich für alle Tagesstunden in den verschiedenen Monaten mit. Danach würde die mittlere Abweichung eines Stundenwerthes bei einer einjährigen Beobachtungsreihe $\pm 0^\circ.25$ betragen, dementsprechend der mittlere Fehler $1.25 \times$ mittl. Abweichung $= \pm 0^\circ.31$. Bezeichnen wir diesen Werth mit ε, so wird



[1]) Die Daten für die mittlere Bewölkung der ersten vier Stationen sind der Wild'schen Abhandlung „Ueber die Bewölkung Russlands", diejenigen für Bern der Weilenmann'schen Arbeit entnommen.

den mittleren, einer einzelnen stündlichen Beobachtung anhaftenden Fehler vorstellen, wenn die Beobachtungsreihe m Jahre umfasst. Die folgende Tabelle

	$\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$	η
Tiflis	$\pm 0\overset{\circ}{.}10$	$\pm 0\overset{\circ}{.}08$
Peking	0.13	0.11
Barnaul	0.07	0.05
Bern	0.13	0.05

enthält in der zweiten Columne diese Beobachtungsfehler, während die in dritter Columne mitgetheilten η die bei der Darstellung der Junicurven durch die Gleichung (39) übrigbleibenden Fehler der einzelnen Stundenwerthe bezeichnen. Da sämmtliche η sich kleiner ergeben, als die den Beobachtungen anhaftenden Fehler, so dürfen wir annehmen, dass die Gleichung (39) den Anforderungen genügt.

Die jährliche Amplitude der da_n wird, da sie offenbar durch locale Umstände beeinflusst ist, für verschiedene Stationen erhebliche Verschiedenheiten zeigen können. Während beispielsweise die Beobachtungen von Tiflis und Peking das ganze Jahr hindurch eine vollständige Vernachlässigung dieses Coëfficienten gestatten, verlangen die Beobachtungen von Nukuss einen Werth, der im Juni fast den fünften Theil des Coëfficienten a_n beträgt. Vor Allem wird die absolute Grösse der Bewölkung eine grosse Rolle spielen. Je dichter die Wolkenschicht, um so geringer ist die Einstrahlung und demgemäss auch die Verdunstung; und die Beobachtungen scheinen zu bestätigen, dass da_n in ganz ähnlicher Weise von der Bewölkung abhängt, wie die Einstrahlungsconstante a_n selbst. Auch die Eintrittszeit der höchsten resp. geringsten Transmission der Atmosphäre wird wohl kaum für alle Bewölkungsgrade die gleiche sein. Aber wie verschieden sich auch die Grösse der da_n für verschiedene Beobachtungsorte ergeben mag, so verknüpft doch alle Stationen das gemeinsame Band, dass der jährliche Gang dieser Constanten überall der gleiche ist. Immer finden sich die beiden Extreme zur kältesten und wärmsten Jahreszeit, dazwischen ein Uebergang vom negativen zum positiven Werthe zur Zeit des Frühlings-, der umgekehrte zur Zeit des Herbstäquinoctiums. Darnach kann wohl kein Zweifel bestehen, dass die täglichen Schwankungen der Luftfeuchtigkeit resp. Bewölkung, welche in ihren enormen

Einwirkungen auf die Sonnenstrahlung auch durch die Crova'schen Messungen erwiesen wurden, als die Ursache der besprochenen Veränderungen des täglichen Temperaturganges anzusehen sind.

§ 6.

Die Untersuchungen dieses Paragraphen werden sich hauptsächlich mit den Beziehungen der absoluten Bewölkungsgrösse zur eingestrahlten Sonnenwärme beschäftigen. Zur Lösung dieser Frage hätten wir, ähnlich wie es von Herrn Weilenmann für die Nachttemperaturen geschehen ist, die Gleichung (39) auf Tagbeobachtungen bei verschiedenen Bewölkungszuständen anzuwenden und das Verhalten der Constanten zu prüfen. Leider stand mir aber zu einer derartigen Untersuchung kein hinreichendes Material zur Verfügung. Die Schwankungen der Monatsmittel der Bewölkung sind viel zu gering, um hieraus brauchbare Resultate ableiten zu können. Ich glaubte indessen, auf einem anderen Wege durch Benutzung einer grösseren Anzahl von Temperaturamplituden, welche Herr Weilenmann in seiner Abhandlung p. 22 für verschiedene Bewölkungsgrade mitgetheilt hat, zum Ziele gelangen zu können, und habe versucht, dieses Material in folgender Weise zu verwenden.

Geht man aus von der einfachen Temperaturgleichung

$$t = t_0 + a_n \cos (\zeta - v) \tag{41}$$

und bezeichnet mit τ den halben Tagebogen der Sonne, mit m und M das Minimum resp. Maximum der Temperatur, so bestehen, da beide der Tagescurve angehören und demgemäss durch die Gleichung (41) dargestellt werden, die beiden speciellen Gleichungen:

$$m = t_0 + a_n \cos (\tau + v)$$
$$M = t_0 + a_n,$$

aus denen für die Amplitude A_n folgt:

$$A_n = a_n \left\{1 - \cos(\tau + v)\right\} = 2 a_n \sin^2 \frac{\tau + v}{2} = 2 a'_n \cos \delta \sin^2 \frac{\tau + v}{2}. \tag{42}$$

Bekanntlich hat zuerst Lamont den Erfahrungssatz ausgesprochen, dass für gleiche Bewölkungsgrade der Quotient $\frac{A_n}{\tau}$ in allen Jahreszeiten eine Constante sei. Um nun die Formel (42) mit diesem Satze in Uebereinstimmung zu bringen, ist es nöthig, da a'_n während des ganzen Jahres constant ist, dass der Quotient

$$q = \frac{\sin^2 \frac{\tau + v}{2} \, . \cos \delta}{\tau} \tag{43}$$

für alle Tageslängen mit hinreichender Annäherung der gleiche sei.

Herr Weilenmann theilt für Bern folgende Werthe des Lamont'schen Coëfficienten $\frac{A_n}{\tau}$ mit:

Bewölkung =	0.0	0.5	1.0	[0.0 ganz heiter, 1.0 ganz bedeckt]
Winter .	1.00	0.68	0.31	
Frühling	0.98	0.72	0.28	(l. c. p. 23).
Sommer	0.87	0.66	0.27	
Herbst .	1.04	0.73	0.29	

Der Quotient q hat für dieselben Epochen die Werthe:

	τ (h)	q
Winter .	4.6	1.00
Frühling	6.8	0.97
Sommer	7.6	0.87
Herbst .	5.5	1.02 .

Reducirt man durch Multiplication mit $\frac{1}{q}$ die mitgetheilten Werthe auf die Gleichung (42), so erhält man für den Lamont'schen Coëfficienten die folgenden Beträge:

Bewölkung =	0.0	0.5	1.0
Winter .	1.00	0.68	0.31
Frühling	1.01	0.74	0.29
Sommer	1.00	0.76	0.31
Herbst .	1.02	0.72	0.29 .

Eine Verbesserung ist besonders für ganz heiteren Himmel bemerkbar. Jedenfalls dürfen wir behaupten, dass die Formel (42) sich in vollster Uebereinstimmung mit dem Lamont'schen Satze befindet.

Wenn wir den Einfluss der täglichen Schwankung der Bewölkung und Luftfeuchtigkeit vernachlässigen, so drückt diese Formel eine sehr einfache Beziehung zwischen der Temperaturamplitude und der Constanten a'_n aus. Wenden wir dieselbe z. B. auf die von Herrn Weilenmann mitgetheilten Amplituden an, so werden wir zu folgenden Werthen von a'_n geführt:

Winter		Frühling		Sommer		Herbst	
n	a'_n	n	a'_n	n	a'_n	n	a'_n
0.28	6.°33	0.18	7.°08	0.07	7.°36	0.16	7.°13
0.66	4.05	0.49	5.63	0.26	6.44	0.43	5.53

Winter		Frühling		Sommer		Herbst	
n	a'_n	n	a'_n	n	a'_n	n	a'_n
0.85	3°79	0.69	4°63	0.45	6°29	0.65	4°71
1.00	2.40	0.87	3.55	0.65	4.71	0.84	3.84
		1.00	2.15	0.86	3.54	0.99	2.16
				1.00	2.32		

Eine graphische Ausgleichung dieser Werthe innerhalb der einzelnen Jahreszeiten ergiebt, dass sie in befriedigender Weise durch die linearen Beziehungen:

$$\begin{array}{ll} \text{Winter} \;. & a'_n = 7\overset{\circ}{.}85\,.\,(1-0.68\,n) \\ \text{Frühling} & 8.30\,.\,(1-0.69\,n) \\ \text{Sommer} & 8.30\,.\,(1-0.68\,n) \\ \text{Herbst} \;. & 8.05\,.\,(1-0.68\,n) \end{array} \qquad (44)$$

dargestellt werden, und zwar mit der mittleren Abweichung von $\pm 0\overset{\circ}{.}28$ für einen Einzelwerth.

Anschliessend theile ich folgende Pariser Beobachtungen mit:

	n	Beob.	Rechn.	B—R	
Winter	0.00	7°18	7°09	+ 0°09	
	0.71	3.16	3.29	— 13	$a'_n = 7\overset{\circ}{.}09\ (1-0.75\,n)$
	1.00	1.78	1.77	+ 1	
Frühling	0.00	8.23	8.26	— 3	
	0.55	4.97	4.97	0	$8.26\ (1-0.72\,n)$
	1.00	2.37	2.32	+ 5	
Sommer	0.00	8.14	8.15	— 1	
	0.52	5.27	5.24	+ 3	$8.15\ (1-0.68\,n)$
	1.00	2.61	2.61	0	
Herbst	0.00	8.18	8.15	+ 3	
	0.62	4.31	4.53	— 22	$8.15\ (1-0.72\,n)$
	1.00	2.45	2.28	+ 17	

Zunächst erkennen wir in den mitgetheilten Zahlen den Beweis für die bereits in § 4 aufgestellte Behauptung, dass die Einstrahlungsconstante mit genügender Annäherung als eine lineare Function der Bewölkung betrachtet werden könne. Die Vernachlässigung des mit da_n multiplicirten Gliedes wird auf diesen Satz keinen wesentlichen Einfluss haben, wenn wir annehmen dürfen, dass da_n, wie bereits erwähnt wurde, in ähnlicher Weise von der Bewölkung abhängt.

Die numerischen Beträge der Grösse α_0' werden nach dieser Methode systematisch zu klein gefunden. Die Ursachen, welchen dieser Fehler entspringt, auf die an dieser Stelle aber nicht näher eingegangen werden soll, legen indessen nahe, dass diese systematischen Unterschiede ebenfalls demselben Bewölkungsgesetze unterworfen sind.

Um den wahren Werth dieser Constanten zu finden, ist es unbedingt nöthig, die stündlichen Temperaturbeobachtungen der Bewölkung entsprechend zu trennen, diejenigen Werthe, welche demselben Bewölkungszustande entsprechen, zu einer Curve zu vereinigen und aus dieser die Parameter der Gleichung (39) zu bestimmen. Man hätte also die Aufgabe, welche Herr Angot für die Bewölkungszustände 0.0 und 1.0 unternommen hat, auf möglichst viele zwischenliegende Bewölkungsgrade auszudehnen.

Setzt man

$$a_n = a_0 \,.\, (1-\beta n) = \alpha_0 \cos\varphi \,.\, \cos\delta \; (1-\beta n),$$

so müssen, theoretisch betrachtet, α_0 und β für alle Orte mit continentalem Klima und gleicher Bodenbeschaffenheit constant sein, vorausgesetzt, dass auch der mittlere Feuchtigkeitszustand der Atmosphäre keine erheblichen Verschiedenheiten zeigt.

Nehmen wir für β unter Zugrundelegung der zehntheiligen Bewölkungsscala den mittleren Werth

$$\beta = 0.07$$

an, so ermöglicht die Gleichung

$$A_n = 2\alpha_0 \cos\varphi \cos\delta \sin^2 \frac{\tau + v}{2} \, (1-\beta n) \tag{45}$$

aus gegebener Amplitude A_n für jeden Beobachtungsort die Constante α_0 zu berechnen.

Ich führe hier zunächst als Beispiel für 19 Stationen zwischen 65° und 40° nördlicher Breite die Mittel der beobachteten Amplituden und Bewölkungsgrössen von April bis September, sowie die zur Rechnung nöthigen Constanten an:

	φ	τ	A_n	n
Archangelsk . .	+64.5°	8h 45m	+6.83°	4.8
Bogoslowsk . . .	59.7	8 5	8.49	4.9
Dorpat	58.4	7 58	7.83	5.5
St. Katharinenburg	56.8	7 50	8.53	5.6
Kasan	55.8	7 45	7.74	4.6

	φ	τ	A_n	n
Slatoust	55°.2	7ʰ 43ᵐ	9°.24	5.0
Barnaul	53.3	7 35	10.24	3.8
Leipzig	51.8	7 29	8.22	6.2
Göttingen . . .	51.5	7 28	7.70	6.5
Nertschinsk . . .	51.3	7 28	10.44	4.3
Brüssel	50.4	7 25	7.67	6.3
Paris	48.9	7 20	9.10	5.3
Lugan	48.6	7 19	10.25	4.7
München . . .	48.1	7 18	9.38	6.2
Bern	47.0	7 14	8.93	5.5
Nukuss	42.4	7 4	14.20	2.4
Tiflis	41.7	7 2	9.67	5.6
Madrid	40.4	6 59	12.85	3.4
Peking	40.0	6 58	9.75	5.3.

Aus diesen wurden die folgenden fünf Gruppen gebildet:

φ	τ	A_n	n	B—R
62°.1	8ʰ 25ᵐ	7°.66	4.8	+0°.14
56.5	7 49	8.34	5.2	+ 9
51.7	7 29	8.85	5.4	— 2
48.1	7 18	9.41	5.4	— 3
41.1	7 1	11.62	4.2	— 18.

(46)

Nehmen wir nun für v den mittleren Werth 37°.4 und setzen $\beta = 0.07$, so erhalten wir mit Hilfe der Gleichung (45) und den Werthen (46)

$$a_0 = +12^\circ.90\,.$$

Die Darstellung der Amplituden in (46) mittels dieses Werthes lässt nichts zu wünschen übrig; die Differenzen B—R sind in (46) in letzter Columne angegeben.

Hiermit scheint nun der Beweis geliefert, dass sowohl a_0 als auch β für continental gelegene Orte in sehr verschiedenen Breiten denselben Werth haben, und zwar zeigt die Auswahl der Stationen, dass man sich nur wenige Meilen von der Küste zu entfernen braucht, um Amplituden zu erhalten, die sich durch die hier ermittelten Werthe von a_0 und β befriedigend darstellen lassen.

In Bezug auf die tägliche Wärmeschwankung beginnt demnach die Continentalität bereits in sehr geringem Abstande von der Meeresküste.

Eine naheliegende Frage dürfte wohl sein, ob die gefundenen Werthe von a_0 und β auch ausserhalb der hier mitgetheilten Zone ihre Gültigkeit behalten. Betrachten wir beispielsweise die Verhältnisse am Aequator. Aus der Gleichung (45) ergiebt sich, dass zu jeder Zeit des Jahres die Amplitude durch den Ausdruck

$$A_n = 19\overset{\circ}{.}9\ (1-\beta n)$$

dargestellt werden müsste. Die Beobachtungen scheinen dieser Behauptung in überraschender Weise zu entsprechen. Ich führe hier einige Werthe von zwei ostafrikanischen Stationen Kakoma und Igonda an (cf. Meteorol. Zeitschr. 1887, p. 421):

$\varphi = -5°\ 40'$ 32°.6 ö. L. Gr.

	Beob. Ampl.	Bewölkung
März	11°.2	8.0
April	12.3	5.7
Mai	16.0	2.6
Juni	20.2	1.1
Juli	20.1	1.3
August	18.8	2.4
September	14.8	3.0
October	15.5	2.4
November	14.4	3.9
December	10.7	6.0.

Fasst man die Amplituden bei geringer und starker Bewölkung zusammen, so erhält man zwei Werthe

Beob. Ampl.	Bewölkung
+12.1	5.9
+17.6	2.1,

welche, wenn die kleinen Schwankungen von $\cos\delta$ und τ gegenüber den jedenfalls noch beträchtlichen zufälligen Beobachtungsfehlern vernachlässigt werden, unter der Annahme $\beta = 0.07$ übereinstimmend den Werth 20°.6 für die Amplitude bei ganz heiterem Himmel, also nur 0°.7 von der theoretisch gefundenen verschieden, ergeben.

Wir sind somit beispielsweise im Stande, mit Hilfe der Gleichung (45) für jeden continental gelegenen Ort die Amplitude für ganz heiteren Himmel

zu berechnen und bedürfen nur einer zuverlässigen Angabe der Bewölkungsgrösse, um den thatsächlichen Betrag der täglichen Wärmeschwankung im Allgemeinen in sehr guter Annäherung zu erhalten. Gewiss wird es an Ausnahmen nicht fehlen, aber diese werden meistens auf locale Ursachen (cf. z. B. die Berichte über Wien und Prag) zurückzuführen sein.

Die folgende Tabelle enthält nun die in dieser Weise berechneten täglichen Amplituden in den Monaten April bis September der Zone 60° bis 40° Breite:

φ	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.
40°	16.°8	17.°1	17.°0	17.°0	17.°0	16.°3
42	16.4	16.6	16.6	16.6	16.5	15.8
44	16.0	16.3	16.2	16.2	16.1	15.3
46	15.5	15.7	15.7	15.7	15.6	14.8
48	15.0	15.3	15.2	15.3	15.2	14.3
50	14.5	14.9	14.8	14.8	14.7	13.8
52	14.0	14.3	14.2	14.2	14.2	13.3
54	13.4	13.8	13.7	13.8	13.7	12.7
56	12.8	13.1	13.1	13.1	13.0	12.1
58	12.3	12.6	12.5	12.6	12.5	11.5
60	11.6	12.0	11.8	11.9	11.8	10.9

. (47)

Zur Erläuterung des Gebrauchs dieser Tabelle seien drei Beispiele gewählt, bei denen es sich darum handelt, bei gegebener Bewölkung die tägliche Wärmeschwankung zu ermitteln:

1) Madrid, $\varphi = 40.^\circ 4$, September. Beobachtete Bewölkung 3.6 (cf. Liznar, Met. Z. XX, p. 242).

Aus Tabelle (47) entnehmen wir $A_0 = 16.^\circ 2$, demnach wird $A_n = 16.^\circ 2\ (1 - 0.07 \times 3.6) = 12.^\circ 1$; beobachteter Werth $12.^\circ 2$ (cf. Wild, Temp. d. russ. R., p. 145).

2) Barnaul, $\varphi = 53.^\circ 3$, Mai. Beobachtete Bewölkung 3.7 (cf. Wild, Bewölkung Russlands, p. 256).

Aus Tabelle (47) entnommen: $A_0 = 14.^\circ 0$, folglich $A_n = 14.^\circ 0\ (1 - 0.07 \times 3.7) = 10.^\circ 4$; beobachteter Werth $10.^\circ 4$ (cf. Wild, Temp. d. r. R.).

3) Dorpat, $\varphi = 58.^\circ 4$, Juli. Beobachtete Bewölkung 4.8 (cf. Wild, Bewölkung Russlands p. 256).

Aus Tabelle (47) entnommen: $A_0 = 12.^\circ 5$, folglich $A_n = 12.^\circ 5\ (1 - 0.07 \times 4.8) = 8.^\circ 3$; beobachteter Werth $9.^\circ 0$ (cf. Wild, Temp. d. r. R.).



§ 7.

Drücken wir die Temperaturen des Sonnenaufganges und Sonnenunterganges t_a und t_u durch die Tagesgleichung aus, so erhalten wir

$$t_u - t_a = a_n \Big[\cos(\tau - v) - \cos(\tau + v)\Big] = 2 a_n \sin v \,.\, \sin \tau$$

oder da

$$a_n = \frac{A_n}{2 \sin^2 \frac{\tau + v}{2}} \qquad \text{ist,}$$

$$t_u - t_a = \frac{A_n \,.\, \sin v \sin \tau}{\sin^2 \frac{\tau + v}{2}}. \tag{48}$$

Andererseits werden aber diese beiden Temperaturen auch durch die Nachtgleichung

$$t = u + c \,.\, e^{-0.382\, hz} = u + c \,.\, b^z$$

dargestellt, und zwar wird, wenn wir nach dem Weilenmann'schen Vorschlage $z = o$ für Mitternacht annehmen,

$$t_u - t_a = c \,.\, \Big\{ b^{\tau - 12} - b^{12 - \tau} \Big\} \tag{49}$$

sein. Aus beiden Gleichungen folgt aber

$$c = A_n \,.\, \frac{\sin v \sin \tau}{\sin^2 \frac{\tau + v}{2} \Big[b^{\tau - 12} - b^{12 - \tau} \Big]}. \tag{50}$$

Wenn wir nun die Gleichung

$$t = t_a + \Big[a_n \cos(\zeta - v) \Big]_{-\tau}^{\zeta} = t_a - a_n \cos(\tau + v) + a_n \cos(\zeta - v)$$

von $-\tau$ bis $+\tau$ integriren und dieses Integral durch $2\,\tau$ dividiren, so erhalten wir offenbar die mittlere Temperatur der Zeit von Sonnenaufgang bis Sonnenuntergang, welche mit T_+ bezeichnet werden soll. Danach ist (τ in Stunden ausgedrückt):

$$T_+ = t_a + a_n \left[\frac{12 \sin \tau}{\tau \,.\, \pi} \cos v - \cos(\tau + v) \right] = t_a + \frac{A_n}{2 \sin^2 \frac{\tau + v}{2}} \left[\frac{12 \sin \tau}{\tau \,.\, \pi} \cos v - \cos(\tau + v) \right]. \tag{51}$$

In ähnlicher Weise erhalten wir das Temperaturmittel der Zeit von Untergang bis Aufgang der Sonne, welches mit T_- bezeichnet werden mag:

$$T_- = u + c \,.\, \frac{b^{12 - \tau} - b^{\tau - 12}}{24 - 2\tau} \frac{\log e}{\log b}$$

und da

$$u = t_a - c \,.\, b^{12-\tau}$$

$$T_- = t_a + c\left[\frac{b^{12-\tau} - b^{\tau-12}}{24-2\tau} \cdot \frac{\log e}{\log b} - b^{12-\tau}\right].$$

Setzen wir hier noch aus (50) den Werth von c ein, so wird schliesslich

$$T_- = t_a - \frac{A_n \sin v \,.\, \sin \tau}{\sin^2 \frac{\tau+v}{2}}\left[\frac{1}{24-2\tau}\,\frac{\log e}{\log b} + \frac{1}{b^{2\tau-24}-1}\right].$$

Das Gesammtmittel T ist aber

$$T = \frac{1}{12}\Big(T_+ \,.\, \tau + T_-\,(12-\tau)\Big),$$

folglich

$$T = t_a + \frac{A_n}{24 \sin^2 \frac{\tau+v}{2}}\left\{\left[\frac{12}{\pi}\sin\tau - \tau\cos\tau\right]\cos v - \sin\tau\sin v\left[\frac{\log e}{\log b} - \tau + \frac{24-2\tau}{b^{2\tau-24}-1}\right]\right\}. \quad (52)$$

Da b und v durch die Gleichungen

$$\log b = -0.382 h \log e \text{ und } \operatorname{tg} v = \frac{1-h^2}{3h}$$

bekannt sind, so lässt sich mit Rücksicht darauf, dass die Temperatur des Sonnenaufganges, theoretisch betrachtet, mit dem Minimum identisch ist, das Tagesmittel in der Form

$$T = \text{Min.} + \alpha \,.\, A_n$$

für beliebige Tageslängen ohne Weiteres berechnen, falls das Minimum und die Amplitude bekannt sind. Man findet für einige specielle Werthe von τ folgende Werthe des Coëfficienten α:

τ	α
4^h	0.433
5	0.462
6	0.484
7	0.499
8	0.508.

Bekanntlich ist dieser Coëfficient bereits von Kämtz auf empirischem Wege bestimmt worden. Die aus Temperaturbeobachtungen von Padua und Leith von ihm hergeleiteten Werthe befinden sich mit den soeben mitgetheilten in guter Uebereinstimmung.

Nun giebt es in der täglichen Curve zwei Punkte, welche die mittlere Tagestemperatur darstellen. Der eine liegt nach den Erfahrungen Vormittags

zwischen 8 und 10 Uhr, ist also in mittleren Breiten stets ein Punkt der Tagcurve, der zweite zwischen 8 und 9 Uhr Abends gehört durchschnittlich der Nachtcurve an.

Um die Eintrittszeit des vormittägigen Mediums zu finden, genügt offenbar die Gleichung:

$$\text{Min.} + \alpha \,.\, A_n = \text{Min.} + \frac{A_n}{2 \sin^2 \frac{\tau + v}{2}} \left[\cos\,(\zeta_m - v) - \cos\,(\tau + v)\right]$$

$$\cos\,(\zeta_m - v) = 2\,\alpha \,.\, \sin^2 \frac{\tau + v}{2} + \cos\,(\tau + v). \tag{53}$$

Analog erhalten wir die Eintrittszeit des nachmittägigen Mediums aus der Relation:

$$\text{Min.} + \alpha \,.\, A_n = \text{Min.} + A_n \frac{\sin\, v \,.\, \sin\, \tau \left[b^{z_m} - b^{12-\tau}\right]}{\sin^2 \frac{\tau + v}{2} \left[b^{\tau - 12} - b^{12-\tau}\right]}$$

$$b^{z_m} = \alpha \,.\, \frac{\sin^2 \frac{\tau + v}{2} \left[b^{\tau - 12} - b^{12-\tau}\right]}{\sin\, v \,.\, \sin\, \tau} + b^{12-\tau}, \tag{54}$$

woraus z_m (von Mitternacht gezählt) berechnet werden kann. Aus beiden Formeln ergeben sich für einzelne τ folgende Werthe:

τ	ζ_m	z_m
h	h m	h
4	9 54 a. m.	8.6 p. m.
5	9 29	8.5
6	9 9	8.5
7	8 53	8.4
8	8 42	8.3.

Die jährlichen Schwankungen der Eintrittszeiten des vormittägigen Mediums sind danach erheblich viel grösser, als die des nachmittägigen.

Um zu prüfen, wie weit diese aus theoretischen Betrachtungen gefundenen Zahlen mit den beobachteten übereinstimmen, habe ich für 15, dem citirten Wild'schen Werke entnommene Stationen, für welche gute Beobachtungsreihen vorlagen, die Mittel der Coëfficienten α, sowie der beiden Eintrittszeiten der mittleren Tagestemperatur für verschiedene Tagebogen gebildet und folgende Werthe erhalten:

τ	α	vormitt. Medium	nachmitt. Medium
h		h m	h m
4	0.402	9 59 a. m.	8 17 p. m.
5	0.429	9 35	8 16

τ	α	vormitt. Medium	nachmitt. Medium
h		h m	h m
6	0.457	9 13 a. m.	8 12 p. m.
7	0.484	8 47	8 10
8	0.510	8 31	8 21.

Es steht nun ferner nichts im Wege, die Temperatur jeder einzelnen Tag- und Nachtstunde durch eine Gleichung

$$t = \text{Min.} + \alpha_\zeta \,.\, A_n$$

darzustellen, wo α_ζ lediglich vom Stundenwinkel der Sonne und der Constanten h abhängt. Wir haben für einen beliebigen Zeitmoment bei Tage:

$$t_\zeta = \text{Min.} + a_n \left[(\cos\, \zeta - v) - \cos\, (\tau + v)\right] = \text{Min.} + 2\,a_n \sin \frac{\zeta + \tau}{2} \sin \left(v - \frac{\zeta - \tau}{2}\right)$$

und da

$$A_n = 2\,a_n \sin^2 \frac{\tau + v}{2}$$

$$t_\zeta = \text{Min.} + \frac{\sin \frac{\zeta + \tau}{2} \sin \left(v - \frac{\zeta - \tau}{2}\right)}{\sin^2 \frac{\tau + v}{2}} \,.\, A_n.$$

Demnach ist für Tagbeobachtungen

$$\alpha_\zeta = \frac{\sin \frac{\zeta + \tau}{2} \,.\, \sin \left(v - \frac{\zeta - \tau}{2}\right)}{\sin^2 \frac{\tau + v}{2}}$$

zu setzen.

Für Nachtbeobachtungen besteht bekanntlich die Gleichung (z von Mitternacht an gerechnet)

$$t_z = u + c \,.\, b^z = \text{Min.} + c \left[b^z - b^{12 - \tau}\right].$$

und mit Berücksichtigung der Relation (50)

$$t_z = \text{Min.} + \frac{\sin\, v \,.\, \sin\, \tau}{\sin^2 \frac{\tau + v}{2}} \,.\, \frac{b^{z + \tau - 12} - 1}{b^{2\tau - 24} - 1} \,.\, A_n,$$

so dass für Nachtbeobachtungen:

$$\alpha_\zeta = \frac{\sin\, v \,.\, \sin\, \tau}{\sin^2 \frac{\tau + v}{2}} \,.\, \frac{b^{z + \tau - 12} - 1}{b^{2\tau - 24} - 1}.$$

Die folgende Tabelle enthält für jede Stunde des Tages und für verschiedene Tageslängen die numerischen Werthe des Coëfficienten α_ζ:

Stunde τ =	8h	7h	6h	5h	4h	
1 a. m.	0.137	0.159	0.173	0.181	0.181	
2	0.085	0.111	0.128	0.139	0.143	(55)
3	0.039	0.068	0.089	0.102	0.110	

Stunde $\tau =$	8^h	7^h	6^h	5^h	4^h
4	0.000	0.032	0.056	0.071	0.081
5	0.068	0.000	0.026	0.044	0.057
6	0.164	0.103	0.000	0.020	0.035
7	0.282	0.230	0.141	0.000	0.016
8	0.413	0.370	0.298	0.183	0.000
9	0.549	0.516	0.460	0.372	0.231
10	0.680	0.656	0.617	0.554	0.454
11	0.797	0.782	0.757	0.718	0.654
Mittag	0.893	0.885	0.872	0.851	0.818
1 p. m.	0.961	0.958	0.953	0.945	0.933
2	0.996	0.995	0.995	0.994	0.993
3	0.996	0.995	0.994	0.994	0.992
4	0.961	0.957	0.952	0.944	0.932
5	0.892	0.884	0.871	0.850	0.794
6	0.796	0.781	0.756	0.718	0.674
7	0.678	0.655	0.633	0.606	0.571
8	0.547	0.540	0.527	0.507	0.481
9	0.440	0.441	0.435	0.422	0.402
10	0.347	0.355	0.355	0.348	0.335
11	0.267	0.280	0.285	0.284	0.276
Mitternacht	0.197	0.215	0.225	0.229	0.225
Mittel	0.508	0.499	0.483	0.462	0.433.

(55)

Aus dieser Tabelle lässt sich zunächst für jede einzelne Stunde erkennen, um wie viel ihre Temperatur vom Tagesmittel entfernt ist. Wir gewinnen offenbar auf diese Weise eine Methode, den Grad der Zuverlässigkeit zu ermitteln, mit welcher gewisse Stundencombinationen das Tagesmittel darzustellen vermögen. Nachstehend seien einige Zahlenwerthe von α mitgetheilt, wie sie sich aus der Tabelle für mehrere der gebräuchlichsten Combinationen ergeben:

τ	$\frac{1}{3}$(6a.+2p.+10p.)	$\frac{1}{3}$(7a.+2p.+9p.)	$\frac{1}{3}$(7a.+1p.+9p.)	$\frac{1}{4}$(7a.+2p.+2.9p.)	$\frac{1}{3}$(8a.+2p.+8p.)	$\frac{1}{4}$(8a.+2p.+2.10p.)
4^h	0.454	0.470	0.450	0.453	0.491	0.416
5	0.454	0.472	0.456	0.460	0.561	0.468
6	0.450	0.524	0.510	0.501	0.607	0.501
7	0.484	0.555	0.543	0.527	0.635	0.519
8	0.502	0.573	0.561	0.539	0.652	0.526.

Bilden wir nunmehr die Unterschiede dieser Werthe gegen die entsprechenden aus der Integration der 24stündigen Curve erhaltenen, so ergeben sich die folgenden Correctionen des nach (55) berechneten Coëfficienten α:

τ	$\frac{1}{3}$(6a.+2p.+10p.)	$\frac{1}{3}$(7a.+2p.+9p.)	$\frac{1}{3}$(7a.+1p.+9p.)	$\frac{1}{4}$(7a.+2p.+2.9p.)	$\frac{1}{3}$(8a.+2p.+8p.)	$\frac{1}{4}$(8a.+2p.+2.10p.)	
4h	$\triangle\alpha =$ − 0.021	− 0.037	− 0.017	− 0.020	− 0.058	+ 0.017	
5	+ 8	− 10	+ 6	+ 2	− 99	− 6	
6	+ 34	− 40	− 26	− 17	− 123	− 18	(56)
7	+ 15	− 56	− 44	− 28	− 136	− 20	
8	+ 6	− 65	− 53	− 31	− 144	− 18.	

Ist die Amplitude A_n bekannt, so sind die an die Combinationen anzubringenden Correctionen

$$\triangle\alpha \, . \, A_n \, .$$

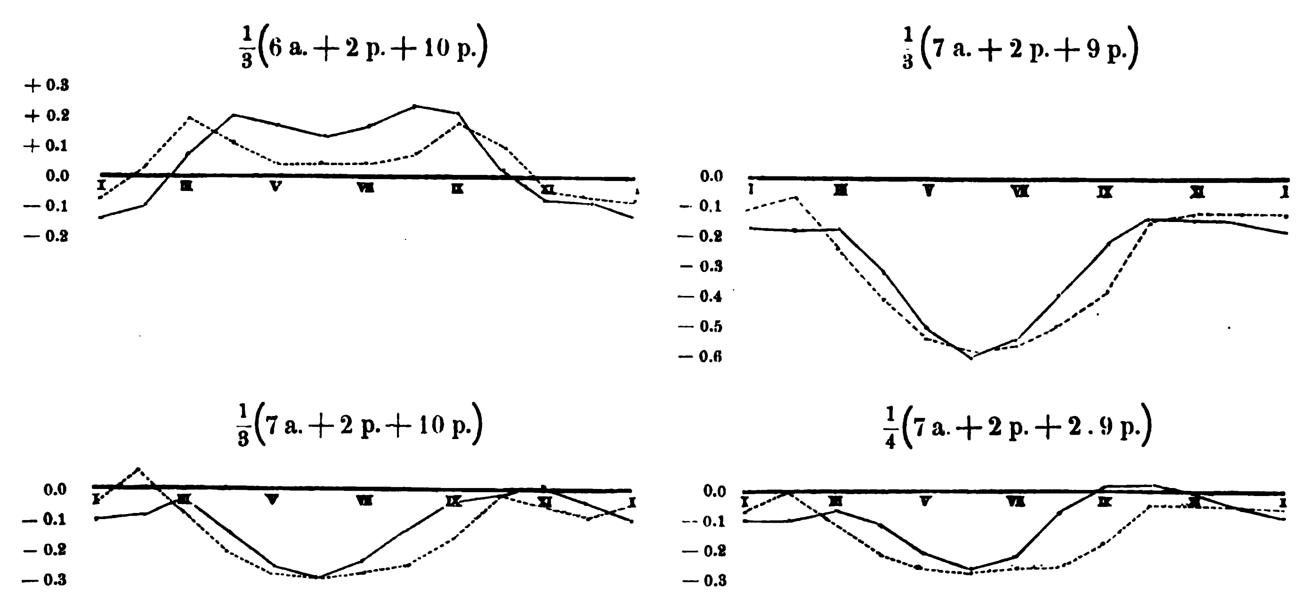
Herr Wild hat in seinem öfters citirten Werke „Ueber die Temperaturverhältnisse des russischen Reiches" p. 144 von 38 Stationen die mittleren täglichen Amplituden für alle Monate des Jahres mitgetheilt und von denselben Beobachtungsorten im Anhange Tabelle V die Correctionen der wichtigeren Stundencombinationen berechnet. Ich habe nun für jeden Monat sowohl die Amplituden, als auch die Correctionen jeder einzelnen Combination zum Mittel vereinigt. Sind unsere theoretischen Betrachtungen richtig, so muss die Multiplication der Amplituden mit den in (56) mitgetheilten $\triangle\alpha$ Zahlenwerthe ergeben, welche mit den thatsächlich beobachteten Correctionen hinreichend übereinstimmen.

Die Mittel der täglichen Amplituden in den einzelnen Monaten, sowie die zugehörigen Werthe von τ sind folgende:

	A_n	τ		A_n	τ		A_n	τ
Jan.	3.4°	4.1h	Mai	8.4°	7.9h	Sept.	7.6°	6.4h
Febr.	5.2	4.9	Juni	8.6	8.4	Oct.	5.8	5.4
März	6.7	5.9	Juli	8.5	8.2	Nov.	4.0	4.4
April	7.7	7.0	Aug.	8.2	7.4	Dec.	2.9	3.9.

Durch Multiplication mit den Werthen von (56) sind die Zahlen entstanden, aus welchen in der folgenden graphischen Tabelle die gestrichelten Curven gebildet sind, während die ausgezogenen Linien den beobachteten jährlichen Gang der Correctionen vorstellen, welche an die einzelnen Combinationen zur Reduction auf wahre Tagesmittel anzubringen sind.





Wir sind demnach in der Lage, mit ziemlich grosser Genauigkeit die Correction einer beliebigen Stundencombination mit Hilfe der Werthe (55) festzustellen, falls die tägliche Wärmeschwankung bekannt ist. Freilich wird man diese letztere nur in seltenen Fällen direct zur Verfügung haben; indessen wird man, falls die Combination eine Mittagsbeobachtung enthält, sich in folgender Weise helfen können. Bezeichnet man die Morgen-, Mittag- und Abendbeobachtung resp. mit t_1, t_2 und t_3, die zugehörigen α_ζ mit α_1, α_2 und α_3, so ist offenbar

$$A_n = \frac{2t_2 - t_1 - t_3}{2\alpha_2 - \alpha_1 - \alpha_3}.$$

Beispiel: Strassburg; Sommer (Juni, Juli, August). Es sind beobachtet:

7^h a. m.	2^h p. m.	9^h p. m.	$\frac{1}{3}(7+2+9)$
$15^\circ.75$	$22^\circ.38$	$17^\circ.49$	$18^\circ.54$.

Für $\tau = 7^h.7$ entnehmen wir der Tabelle (55):

$$2\alpha_2 - \alpha_1 - \alpha_3 = 1.285,$$

folglich

$$A_n = \frac{11^\circ.52}{1.285} = 9^\circ.0.$$

Die aus der 24stündigen Curve entnommene Amplitude beträgt in der That $9^\circ.0$.

Nun ist ferner nach (56) $\triangle\alpha = -0.062$, folglich die Correction der Combination $\frac{1}{3}\left(7\text{ a.} + 2\text{ p.} + 9\text{ p.}\right) = -0^\circ.56$, demnach das Tagesmittel $= 17^\circ.98$.

Für die Combination $\frac{1}{4}\left(7a.+2p.+2.9p.\right)$ entnehmen wir aus (56) $\varDelta\alpha = -0.030$, demnach Tagesmittel $= 18^{\circ}.28 - 0^{\circ}.27 = 18^{\circ}.01$.

Nehmen wir an, wir hätten nur folgende Beobachtungen:

8^h a. m.	2^h p. m.	8^h p. m.	$\frac{1}{3}(8+2+8)$
$17^{\circ}.10$	$22^{\circ}.38$	$18^{\circ}.60$	$19^{\circ}.36$

$$A_n = \frac{9^{\circ}.06}{1.046} = 8^{\circ}.7$$

$\triangle\alpha = -0.142$; folglich Correction $= -0.142 \times 8^{\circ}.7 = -1^{\circ}.24$,

Tagesmittel $= 18^{\circ}.12$.

Alle diese Tagesmittel stimmen aber mit dem wahren, aus der 24 stündigen Curve berechneten $= 18^{\circ}.02$, gut überein.

Die letzte, besonders in Sachsen übliche Combination erfordert sehr beträchtliche Correctionen. Einige Zahlenwerthe der Coëfficienten $\triangle\alpha$, welche Herr Schreiber[1]) auf empirischem Wege aus Leipziger Beobachtungen für die einzelnen Monate gefunden hat, mögen die gute Uebereinstimmung mit den theoretisch berechneten Werthen (56) zeigen:

Jan.	— 0.058	April	— 0.103	Juli	— 0.131	Oct.	— 0.076
Febr.	— 0.056	Mai	— 0.131	Aug.	— 0.115	Nov.	— 0.064
März	— 0.081	Juni	— 0.135	Sept.	— 0.099	Dec.	— 0.047.

Es kann wohl keinem Zweifel unterliegen, dass wir zu noch genaueren Resultaten gelangen werden, wenn auf das Glied des doppelten Winkels der Temperaturgleichung Rücksicht genommen wird. Leider gestattet es meine Zeit nicht, mich jetzt diesem Abschnitte der Untersuchungen zu widmen, der für alle hier behandelten Fragen von grösster Wichtigkeit ist. Es muss aber deshalb nochmals ausdrücklich betont werden, dass die hier gegebenen Rechnungen keinen Anspruch auf minutiöse Genauigkeit erheben dürfen und nur im Grossen und Ganzen den Weg anzeigen sollen, auf welchem durch zahlreiche weitere Rechnungen das Problem nach seiner praktischen Seite erschöpft werden könne.

Die Temperaturen in unmittelbarer Nähe von Sonnen-Auf- und -Untergang werden naturgemäss sich nicht völlig streng den abgeleiteten Gleichungen

[1]) Herleitung wahrer Tagesmittel der Lufttemperatur aus drei- und viermaligen Beobachtungen. Met. Z. 1888, pag. 259.

anschliessen können. Der Uebergang aus der Nacht- zur Taggleichung ist nach einer früheren Anschauung charakterisirt durch das allmähliche Verschwinden der willkürlichen Constanten, und zwar wurde behauptet, dass von dem Augenblicke des Temperaturminimums an der Ausdruck

$$c_1 e^{-0.382hz} + c_2 e^{-2.618hz} = 0$$

gesetzt werden müsse. Zum Weiteren beruhen unsere theoretischen Grundlagen auf der Annahme, dass der Wärmefluss in der obersten Bodenschicht nach unten stationär sei, d. h. dass bei unveränderter Wärmequelle ein Molekül der obersten Schicht an sein innen benachbartes ebensoviel Wärme abgebe, als es in demselben Moment von der Sonne empfängt. Beide Annahmen im Zusammenhange lassen es erklärlich scheinen, dass erstens die Krümmung der Temperaturcurve um die Zeit des Sonnenaufganges flacher ist, als sie nach der Theorie sein dürfte, und dass zweitens der Augenblick, bei welchem die Gültigkeit der Taggleichung beginnt, nach Sonnenaufgang liegen muss. Die Beobachtungen lehren, dass im Allgemeinen die Grenze der Gültigkeit unserer Taggleichung etwa $^1/_4$ Stunde nach Eintritt des Temperaturminimums, also ungefähr $^1/_2$ Stunde nach Sonnenaufgang zu suchen ist. In der Regel wird die zu diesem Augenblicke gehörige Temperatur von dem Minimum nicht erheblich verschieden sein.

Zur Zeit des Unterganges der Sonne mögen ähnliche Verhältnisse obwalten, da aber hier der absteigende Ast der Tagescurve durch die gleichfalls absteigende Nachtcurve fortgesetzt wird, so dürfte der Fehler, der etwa durch Anwendung der Taggleichung über den Bereich ihrer Gültigkeit hinaus begangen wird, hier von geringerer Art sein.

Mit Berücksichtigung dieser Bemerkung werden wir in der Lage sein, aus den Constanten der Tagcurve mit guter Annäherung diejenigen der Nachtcurve zu berechnen. Bezeichnet τ wiederum den halben Tagebogen der Sonne und $-\tau'$ denjenigen Stundenwinkel, für welchen die Gültigkeit der Taggleichung beginnt, so bestimmt sich, wenn wir von der einfacheren Temperaturgleichung

$$t = t_0 + a_n \cos(\zeta - v)$$

ausgehen, die Constante c der für die Nacht geltenden Gleichung:

$$t = u + c \, . \, b^z$$

nach der Formel

$$c = 2a_n \cdot \frac{\sin\frac{\tau+\tau'}{2}\sin\left(v-\frac{\tau-\tau'}{2}\right)}{b^{\tau-12}-b^{12-\tau}}. \qquad \text{[cf. (50)]} \qquad (57)$$

Als Beispiel mögen die stündlichen Beobachtungen der beiden Stationen Peking und Tiflis dienen, für welche nach einer früheren Bemerkung das vom täglichen Gange der Feuchtigkeit abhängende Glied vernachlässigt werden kann. Die numerische Ausgleichung des zwischen Auf- und Untergang der Sonne liegenden Theiles der Pekinger Junicurve führt auf die Gleichung:

$$t = +24^\circ.13 + 5^\circ.59 \cos(\zeta - 38^\circ.4). \qquad (58)$$

Ferner ergiebt sich aus den von Herrn Wild mitgetheilten Daten:

$$\tau = 7^h 30^m = 112^\circ.5; \quad \tau' = 7^h 0^m = 105^\circ \qquad (59)$$

und demgemäss unter Annahme des mittleren Werthes von $\log b = 0.938 - 1$ nach der Formel (57):

$$c = +4^\circ.36.$$

Weiterhin folgt aus (58) und (59) für die Temperatur bei Sonnenuntergang $t_u = +25^\circ.66$ und aus der Gleichung

$$t_u = u + c \cdot b^{\tau-12}$$

für u der Werth

$$u = +17^\circ.37,$$

so dass also die aus der Taggleichung (58) abgeleitete Temperaturgleichung für die Nacht lautet:

$$t = +17^\circ.37 + 4^\circ.36 \left[0.867\right]^x. \qquad (60)$$

Für Tiflis sei der Monat April gewählt, dessen Tagtemperaturen durch die Gleichung

$$t = +10^\circ.50 + 5^\circ.20 \cdot \cos(\zeta - 37^\circ.8) \qquad (61)$$

befriedigend dargestellt werden. Mit Hilfe der Werthe $\tau = 100^\circ$, $\tau' = 92^\circ.5$ ergiebt sich als Gleichung für die Nachttemperaturen

$$t = +5^\circ.51 + 3^\circ.45 \left[0.867\right]^x. \qquad (62)$$

Die folgende Tabelle wird einen Aufschluss geben können über die Sicherheit, mit welcher die 24stündige Curve beider Orte in den entsprechenden Monaten durch die Gleichungen (58) und (60), resp. (61) und (62) festgelegt werden kann.

	Peking—Juni:			Tiflis—April:		
	Beob.	Rechn.	B.—R.	Beob.	Rechn.	B.—R.
1 a. m.	+ 21.1°	+ 21.2°	— 0.1°	+ 8.5°	+ 8.5°	0.0°
2	20.6	20.6	0.0	8.1	8.1	0.0
3	20.2	20.2	0.0	7.7	7.7	0.0
4	19.7	19.8	— 0.1	7.4	7.4	0.0
5	19.5	19.6	— 0.1	7.1	7.2	— 0.1
6	20.7	20.7	0.0	7.3	7.3	0.0
7	22.0	21.9	+ 0.1	8.4	8.5	— 0.1
8	23.3	23.3	0.0	9.8	9.8	0.0
9	24.7	24.8	— 0.1	11.2	11.2	0.0
10	26.1	26.2	— 0.1	12.6	12.5	+ 0.1
11	27.4	27.5	— 0.1	13.7	13.7	0.0
Mittag	28.5	28.5	0.0	14.6	14.6	0.0
1 p. m.	29.3	29.3	0.0	15.2	15.3	— 0.1
2	29.7	29.7	0.0	15.5	15.7	— 0.2
3	29.7	29.7	0.0	15.6	15.7	— 0.1
4	29.4	29.3	+ 0.1	15.4	15.3	+ 0.1
5	28.8	28.6	+ 0.2	14.7	14.7	0.0
6	27.7	27.6	+ 0.1	13.7	13.7	0.0
7	26.2	26.3	— 0.1	12.4	12.6	— 0.2
8	24.8	25.1	— 0.3	11.4	11.6	— 0.2
9	23.8	24.0	— 0.2	10.6	10.8	— 0.2
10	23.1	23.2	— 0.1	10.0	10.1	— 0.1
11	22.4	22.4	0.0	9.4	9.5	— 0.1
Mitternacht	21.7	21.7	0.0	9.0	9.0	0.0.

Bei Stationen, wo die Verhältnisse so einfach liegen, wie bei den soeben erwähnten, genügen schon drei Terminbeobachtungen, um die Temperatur für jede beliebige Tages- und Nachtstunde bis auf wenige Zehntel Grade genau zu ermitteln.

Nehmen wir z. B. an, es stünden uns für Peking im Monat August nur die Beobachtungen um 6 Uhr früh, 2 Uhr Nachmittags und 10 Uhr Abends zur Verfügung, die wir mit t_{-6}, t_{+2} und t_{+10} bezeichnen wollen. Beobachtet wurde:

$$t_{-6} = +21.0^\circ; \quad t_{+2} = +28.2^\circ; \quad t_{+10} = +23.2^\circ.$$

Diese drei Temperaturen genügen nun offenbar den Gleichungen:

$$t_{-6} = t_0 + a_n \cos (90^\circ + v); \quad t_{+2} = t_0 + a_n \cos (30^\circ - v); \quad t_{+10} = u + c\, b^{-2}.$$

Nennen wir wiederum t_a und t_u die Temperaturen bei Auf- resp. Untergang der Sonne, so ist bekanntlich

$$t_a = t_0 + a_n \cos(\tau' + v) = u + c \,.\, b^{12-\tau}$$
$$t_u = t_0 + a_n \cos(\tau - v) = u + c \,.\, b^{\tau-12}$$

und daraus für c die Relation (57)

$$c = 2a_n \frac{\sin\frac{\tau+\tau'}{2}\sin\left(v - \frac{\tau-\tau'}{2}\right)}{b^{\tau-12} - b^{12-\tau}};$$

$$u = t_0 + a_n\left[\cos(\tau' + v) - 2\sin\frac{\tau+\tau'}{2}\sin\left(v - \frac{\tau-\tau'}{2}\right)\frac{b^{12-\tau}}{b^{\tau-12} - b^{12-\tau}}\right],$$

so dass wir zu folgendem System von Gleichungen gelangen:

$$t_{-6} = t_0 + a_n \cos(90^\circ + v)$$
$$t_{+2} = t_0 + a_n \cos(30^\circ - v)$$
$$t_{+10} = t_0 + a_n\left[\cos(\tau' + v) + 2\sin\frac{\tau+\tau'}{2}\sin\left(v - \frac{\tau-\tau'}{2}\right)\frac{b^{\tau-14} - 1}{b^{2\tau-24} - 1}\right],$$

woraus sich die Unbekannten t_0, a_n und v bestimmen lassen.

Aus den Daten für Aufgang $= 5^h\, 10^m$ a. m. und Untergang $= 6^h\, 57^m$ p. m. ergeben sich die Werthe $\tau = 104^\circ$, $\tau' = 95^\circ$, mit deren Hilfe wir die folgenden Zahlen erhalten:

$$a_n = +\overset{0}{4}.59;\quad v = 3\overset{0}{5}.8;\quad t_0 = +2\overset{0}{3}.66;\quad c = +\overset{0}{3}.03;\quad u = +1\overset{0}{9}.18$$

(auf mittlere Zeit bezogen).

Mittelst dieser Constanten findet man z. B. die Temperaturen um 9 Uhr Vormittags und 5 Uhr Nachmittags nach den Formeln:

$$t_{9\,\text{a.m.}} = +2\overset{0}{3}.66 + \overset{0}{4}.59 \cos(45 + 3\overset{0}{5}.8) = +2\overset{0}{4}.4\,,$$
$$t_{5\,\text{p.m.}} = +23.66 + 4.59 \cos(75 - 35.8) = +27.2\,.$$

Die thatsächlich beobachteten Werthe sind $+2\overset{0}{4}.6$ und $+2\overset{0}{7}.4$.

In ähnlicher Weise findet man z. B. die Temperaturen um 9 Uhr Abends und um 5 Uhr früh nach den Gleichungen:

$$t_{9\,\text{p.m.}} = +1\overset{0}{9}.18 + 3.\overset{0}{0}3\, b^{-3} = +2\overset{0}{3}.8\,,$$
$$t_{5\,\text{a.m.}} = +19.18 + 3.03\, b^{+5} = +20.7\,,$$

während die bez. beobachteten Temperaturen $+2\overset{0}{3}.6$ und $2\overset{0}{0}.8$ betragen.